基本不等式

一、选择题

1．设$a>1,b>2$且$ab=2a+b$则$a+b$的最小值为

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$+1　　C. $2\sqrt{2}$+2　　D. $2\sqrt{2}$+3

【答案】D
【解析】

试题分析：$\therefore ab=2a+b\therefore \frac{2}{b}+\frac{1}{a}=1\therefore a+b=(a+b)\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right)=3+\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}\ge 3+2\sqrt{2}$，当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$时等号成立，所以最小值为$3+2\sqrt{2}$

考点：不等式性质

2．若$2^{x}+2^{y}=1$，则$x+y$的取值范围是（　　）

A．$[0,2]$　　B．$[-2,0]$　　C．$(-\infty,-2]$　　D．$[-2,+\infty)$

【答案】C
【解析】

试题分析：$1=2^{x}+2^{y}\ge 2\sqrt{2^{x}\cdot 2^{y}}=2\sqrt{2^{x+y}}$，$\sqrt{2^{x+y}}\le\frac{1}{2}$，$2^{x+y}\le\frac{1}{4}=2^{-2}$，则$x+y\le -2$，选C.

考点：不等式.

3．已知$x>2$，函数$y=\frac{4}{x-2}+x$的最小值是（　　）

A．5　　B．4　　C．8　　D．6

【答案】D
【解析】

试题分析：因为该函数的单调性较难求，所以可以考虑用不等式来求最小值，$y=\frac{4}{x-2}+x=\frac{4}{x-2}+(x-2)+2$，因为$x>2\Rightarrow x-2>0$，由重要不等式可知$\frac{4}{x-2}+(x-2)\ge 4$，所以$y\ge 6$，本题正确选项为D.

考点：重要不等式的运用.

4．已知 $a^2+c^2-ac-3=0$，则 c+2a 的最大值是（　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{6}$　　C．$2\sqrt{7}$　　D．$3\sqrt{3}$

【答案】C
【解析】

试题分析：利用判别式法进行解答：令 t=c+2a，得 c=t﹣2a．代入 $a^2+c^2-ac-3=0$，整理得 $7a^2-5ta+t^2-3=0$，利用根的判别式△=28﹣t^2≥0 来求 t 的最大值即可.

解：设 t=c+2a，则 c=t﹣2a，

将其代入 $a^2+c^2-ac-3=0$，得

$a^2+(t-2a)^2-a(t-2a)-3=0$，

官方网站：www.jidiedu.com
联系电话：55051096　　18721029997　　18721869997
华东总部：上海市杨浦区五角场万达广场 C 座 9 层（政通路 177 号）
上海市徐家汇中金国际广场 C 座 7 层（漕溪北路 375 号）

整理得：$7a^2-5ta+t^2-3=0$，
这个关于 a 的一元二次方程中，由判别式△≥0 得，
$\triangle=(-5t)^2-4\times7(t^2-3)\geq0$，即 $28-t^2\geq0$，
解得 $-2\sqrt{7}\leq t\leq2\sqrt{7}$，
所以 $t=c+2a$ 的最大值是 $2\sqrt{7}$.
故选 C.

5．已知正数 x,y 满足 $x+3y=5xy$，则 $3x+4y$ 的最小值是（　　）

A. $\dfrac{24}{5}$　　B. $\dfrac{28}{5}$　　C. 5　　D. 6

【答案】C
【解析】

试题分析：由 $x+3y=5xy$，用 y 表示 x 可以得到 $x=\dfrac{3y}{5y-1}$，且 $y>\dfrac{1}{5}$，所以 $3x+4y=\dfrac{9y}{5y-1}+4y$

$=\dfrac{4}{5}(5y-1)+\dfrac{9}{5(5y-1)}+\dfrac{13}{5}$，不妨设 $t=5y-1$，则 $t>0$，并且 $3x+4y=\dfrac{1}{5}\left(4t+\dfrac{9}{t}\right)+\dfrac{13}{5}$

$\geq\dfrac{1}{5}\times2\sqrt{4t\cdot\dfrac{9}{t}}+\dfrac{13}{5}=5$，当且仅当 $4t=\dfrac{9}{t}$ 即 $t=\dfrac{3}{2}$ 时取等号，所以 $3x++4y$ 的最小值是 5，故选 C.

考点：1、基本不等式；2、已知条件求最值.

6．若圆 $x^2+y^2-2x-4y-1=0$ 上存在两点关于直线 $2ax+by-2=0\ (a>0,b>0)$ 对称，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}$ 的最小值为（　　）

A. 5　　B. 7　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 9

【答案】D
【解析】

试题分析：圆 $x^2+y^2-2x-4y-1=0$ 的圆心为 $(1,2)$，由已知得直线 $2ax+by-2=0$ 必经过圆心 $(1,2)$，

即 $a+b=1$；所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}=(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b})(a+b)=5+\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{b}\geq5+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{4a}{b}}=9$，当且仅当 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{4a}{b}$ 时等号成立，故 D 为正确答案.

考点：1、圆的方程；2、对称问题；3、基本不等式.

7．已知 a＞b，且 ab=1，则$\frac{a^2+b^2}{a-b}$的最小值是____________．

【答案】$2\sqrt{2}$
【解析】
试题分析：将条件进行整理，然后利用基本不等式的解法即可得到结论．
解：∵ab=1，a＞b，

$$\therefore \frac{a^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2ab}{a-b}=a-b+\frac{2}{a-b}\geqslant 2\sqrt{(a-b)\cdot\frac{2}{a-b}}=2\sqrt{2},$$

当且仅当 $a-b=\frac{2}{a-b}$，

即 $a-b=\sqrt{2}$时取等号，

故$\frac{a^2+b^2}{a-b}$的最小值是 $2\sqrt{2}$，

故答案为：$2\sqrt{2}$
考点：基本不等式．

8．设 $a,b>0,a+b=7$，则 $\sqrt{a+3}+\sqrt{b+2}$ 的最大值为________．

【答案】$2\sqrt{6}$

【解析】$\frac{(a+b)^2}{2}\le a^2+b^2 \Rightarrow a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$

$\sqrt{a+3}+\sqrt{b+2}\le\sqrt{2[(\sqrt{a+3})^2+(\sqrt{b+2})^2]}=\sqrt{2(a+3+b+2)}=2\sqrt{6}$，当且仅当 $\sqrt{a+3}=\sqrt{b+2}$，

即 $a=3,b=4$ 时等号成立，故最大值为 $2\sqrt{6}$．

考点：基本不等式．

9．$\frac{1}{2}$，$\frac{4}{5}$
【解析】
试题分析：由题意可得 $2=a+2b\ge 2\sqrt{a\cdot 2b}$，变形可得 ab 的最大值 $\frac{1}{2}$；又可得 $a=2-2b$ 且 a^2+b^2 由二次函数区间的最值可得，最小值 $\frac{4}{5}$

考点：基本不等式

官方网站：www.jidiedu.com
联系电话：55051096　　18721029997　　18721869997
华东总部：上海市杨浦区五角场万达广场 C 座 9 层（政通路 177 号）
上海市徐家汇中金国际广场 C 座 7 层（漕溪北路 375 号）

10．5

【解析】

试题分析：$y=2x+2+\frac{1}{2x-1}=2x-1+\frac{1}{2x-1}+3\geq 2\sqrt{(2x-1)\cdot\frac{1}{2x-1}}+3=5$，当且仅当$2x-1=\frac{1}{2x-1}$时等号成立，所以最小值为 5

考点：不等式性质

11．9

【解析】

试题分析:由题意可得:$b=2-a\ (0<a<1)$,令 $f(a)=\frac{4}{a}+\frac{1}{b-1}=\frac{4}{a}+\frac{1}{1-a}$ 则 $f'(a)=\frac{-(3a-2)(a-2)}{a^2(1-a)^2}$，

所以 $f(a)=\frac{4}{a}+\frac{1}{1-a}$ 在 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 上为减函数，在 $\left(\frac{2}{3},1\right)$ 上为增函数，所以 $f_{\min}=f\left(\frac{2}{3}\right)=9$；故填 9.

考点：函数的性质及其导数的应用.

12．10

【解析】

试题分析：$\because\ a+b+c=1$，$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$，$\therefore$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3+2+2+2=9$，则 $\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\geq 9+1=10$，故答案为 10.

考点：基本不等式.