

不等式复习

1. 已知 $a > 1$ ，则不等式 $a + \frac{2}{a-1}$ 的最小值为_____。

解： $a + \frac{2}{a-1} = a-1 + \frac{2}{a-1} + 1 \geq 1 + 2\sqrt{2}$ ，当且仅当 $a-1 = \frac{2}{a-1}$ ，即 $a = 1 + \sqrt{2}$ 时等号成立。 $\therefore$ 不等式 $a + \frac{2}{a-1}$ 的最小值为 $1 + 2\sqrt{2}$ 。

2. 不等式 $\frac{6}{x+2} > 1$ 的解集为_____。

解：（不等式单元测验第 17 题） $\because \frac{6}{x+2} > 1$ ， $\therefore \frac{6}{x+2} - 1 = \frac{4-x}{x+2} > 0$ ， $\therefore (x-4)(x+2) < 0$ ， $\therefore$ 解集为 $(-2, 4)$ 。

3. 函数 $y = -2x^2 + 4x - 1$ ($x \in [0, 3]$) 的最大值是 M ，最小值是 m ，则 $M - m =$ _____。

解： $y = 1 - 2(x-1)^2$ ， $\therefore M = 1$ （当 $x = 1$ 时）， $m = -7$ （当 $x = 3$ 时）， $\therefore M - m = 8$ 。

4. 若不等式 $|8x + 9| < 7$ 和不等式 $ax^2 + bx - 2 > 0$ 的解集相等，则 $a + b =$ _____。

解析：解法一： $|8x + 9| < 7 \Leftrightarrow (8x + 9)^2 < 49 \Leftrightarrow 4x^2 + 9x + 2 < 0 \Leftrightarrow -4x^2 - 9x - 2 > 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx - 2 > 0$ 。

$\therefore a = -4$ ， $b = -9$ 。

解法二：解不等式 $|8x + 9| < 7 \Leftrightarrow -7 < 8x + 9 < 7$

$$\Leftrightarrow -16 < 8x < -2 \Leftrightarrow -2 < x < -\frac{1}{4}$$

$\therefore ax^2 + bx - 2 > 0$ 的解集为 $(-2, -\frac{1}{4})$ 。

$$\therefore \begin{cases} a < 0, \\ -2 \cdot (-\frac{1}{4}) = -\frac{2}{a}, \\ -2 - \frac{1}{4} = -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

求得 $\begin{cases} a = -4, \\ b = -9. \end{cases} \quad a + b = -13$

5. 不等式 $\sqrt{4 - x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0$ 的解是_____；

$\sqrt{4 - x^2} \geq \frac{-|x|}{x}$ ，当 $0 < x \leq 2$ 时，不等式成立，另由

$$\begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ \sqrt{4 - x^2} - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ 4 - x^2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x < 0. \text{ 解集是 } [-\sqrt{3}, 0) \cup (0, 2]$$

6. 设 $x, y \in \mathbb{R}^+$ 且 $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$, 则 $x\sqrt{1+y^2}$ 的最大值为_____;

$$\sqrt{x^2(1+y^2)} = \sqrt{\frac{4x^2(1+y^2)}{4}} \leq \frac{4x^2+1+y^2}{2} = \frac{5}{4}$$

7. 已知关于 x 的不等式: $|x+2| + |2x-a| \geq \frac{3}{2}x+b$ 。

(1) 若 $a=5$, $b=1$, 试求不等式的解;

(2) 若 $a=5$, 且不等式的解集为 $\mathbb{R}$, 试确定实数 b 的取值范围;

(3) 若 $b=1$, 且不等式对任意实数 x 恒成立, 试确定实数 a 的取值范围。

解: (1) 若 $a=5$, $b=1$, 则不等式为 $|x+2| + |2x-5| \geq \frac{3}{2}x+1$

当 $x \geq \frac{5}{2}$ 时, $x+2+2x-5 \geq \frac{3}{2}x+1$

$$\frac{3}{2}x \geq 4$$

$$x \geq \frac{8}{3}$$

$$\therefore x \geq \frac{8}{3}$$

当 $-2 < x < \frac{5}{2}$ 时, $x+2-2x+5 \geq \frac{3}{2}x+1$

$$\frac{5}{2}x \leq 6$$

$$x \leq \frac{12}{5}$$

$$\therefore -2 < x \leq \frac{12}{5}$$

当 $x \leq -2$ 时, $-x-2-2x+5 \geq \frac{3}{2}x+1$

$$\frac{9}{2}x \leq 2$$

$$x \leq \frac{4}{9}$$

$$\therefore x \leq -2$$

综上, 不等式的解为 $x \leq \frac{12}{5}$ 或 $x \geq \frac{8}{3}$

(2) 若 $a=5$, 则不等式为 $|x+2| + |2x-5| \geq \frac{3}{2}x+b$ 的解集为 $\mathbb{R}$

当 $x \geq \frac{5}{2}$ 时, $x+2+2x-5 \geq \frac{3}{2}x+b$

$$\frac{3}{2}x \geq b+3$$

$$x \geq \frac{2b+6}{3}$$

$$\text{则 } b \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{当 } -2 < x < \frac{5}{2} \text{ 时 } x+2-2x+5 \geq \frac{3}{2}x+b$$

$$\frac{5}{2}x \leq 7-b$$

$$x \leq \frac{14-2b}{5}$$

$$\frac{14-2b}{5} \geq \frac{5}{2}$$

$$\text{则 } b \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{当 } x \leq -2 \text{ 时 } -x-2-2x+5 \geq \frac{3}{2}x+b$$

$$\frac{9}{2}x \leq 3-b$$

$$x \leq \frac{6-2b}{9}$$

$$\frac{6-2b}{9} \geq -2 \text{ 则 } b \leq 12$$

$$\text{综上: } b \leq \frac{3}{4}$$

(3) 若 $b=1$, 则不等式为 $|x+2|+|2x-a| \geq \frac{3}{2}x+1$ 对任意实数 x 恒成立

即 $|2x-a| \geq \frac{3}{2}x+1-|x+2|$ 对任意实数 x 恒成立

当 $x \geq -2$ 时, $|2x-a| \geq \frac{3}{2}x+1-x-2 = \frac{x}{2}-1$

$$2x-a \geq \frac{x}{2}-1 \text{ 或 } 2x-a \leq -\frac{x}{2}+1$$

$$\frac{3}{2}x \geq a-1 \text{ 或 } \frac{5}{2}x \leq a+1$$

$$x \geq \frac{2a-2}{3} \text{ 或 } x \leq \frac{2a+2}{5}$$

$$\frac{2a-2}{3} \leq -2 \text{ 或 } \frac{2a+2}{5} \geq \frac{2a-2}{3} \quad a \leq 4$$

$$a \leq -2 \text{ 或 } a \leq 4$$

$$\therefore a \leq 4$$

$$\text{当 } x < -2 \text{ 时, } |2x - a| \geq \frac{3}{2}x + 1 + x + 2 = \frac{3x}{2} + 3$$

$$2x - a \geq \frac{3x}{2} + 3 \text{ 或 } 2x - a \leq -\frac{3x}{2} - 3$$

$$\frac{1}{2}x \geq a + 3 \text{ 或 } \frac{7}{2}x \leq a - 3$$

$$x \geq 2a + 6 \text{ 或 } x \leq \frac{2a - 6}{7}$$

$$\frac{2a - 6}{7} \geq -2 \text{ 或 } 2a + 6 \leq \frac{2a - 6}{7}$$

$$a \geq -4 \text{ 或 } a \leq -4$$

$$\therefore a \in \mathbb{R}$$

综上: $a \leq 4$