向量

1．已知O是ΔABC所在平面内的一点，动点P满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)$，$\lambda\in(0,+\infty)$,则动点$P$的轨迹一定通过$\Delta ABC$的(　　)

A.垂心　　B.重心　　C．内心　　D．外心

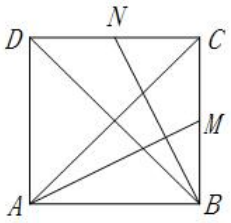
【答案】A

【解析】$\because \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)$，$\therefore \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)$，即$\overrightarrow{AP}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)$．又$\because \overrightarrow{BC}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)=-|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{BC}|=0$，$\therefore \overrightarrow{BC}$与$\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)$垂直，即$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$，$\therefore$点$P$在$BC$的高线上，即$P$的轨迹过$\Delta ABC$的垂心，

故选 A.

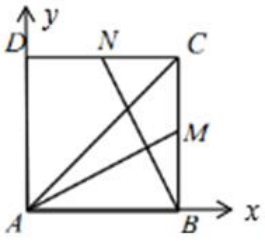
2．如图，正方形$ABCD$中，M，N 分别是 BC 和 CD 的中点，若$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BN}$，则$\lambda+\mu=$(　　)

A.$\frac{3}{5}$　　B.$\frac{4}{3}$　　C.2　　D.$\frac{8}{5}$



【答案】D

【解析】以 AB，AD 为坐标轴建立平面直角坐标系，如图：



设正方形边长为 1，则$\overrightarrow{AM}=\left(1,\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{BN}=\left(-\frac{1}{2},1\right),\overrightarrow{AC}=(1,1)$.

$\because \overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BN}$，

官方网站：www.jidiedu.com
联系电话：55051096　18721029997　18721869997
华东总部：上海市杨浦区五角场万达广场 C 座 9 层（政通路 177 号）
上海市徐家汇中金国际广场 C 座 7 层（漕溪北路 375 号）

$\therefore \begin{cases} \lambda-\frac{1}{2}\mu=1 \\ \frac{1}{2}\lambda+\mu=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} \lambda=\frac{6}{5} \\ \mu=\frac{2}{5} \end{cases}$.

$\therefore \lambda+\mu=\frac{8}{5}$.

3．已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是平面内两个互相垂直的单位向量,若向量 $\vec{c}$ 满足 $\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\bullet\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0$,则 $\left|\vec{c}\right|$ 的最大值是(　　)

A．1　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

【答案】C

【解析】$\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\vec{c}^{2}=\vec{c}^{2}-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$，$c^{2}-\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)c=0$，$c=\cos\alpha+\cos\beta=\cos\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，最大值为 $\sqrt{2}$，其中 α,β 为向量 $\vec{c}$ 与 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角.

4. 在平面直角坐标系中,O 为原点,$A(-1,0),B\left(0,\sqrt{3}\right),C(3,0)$，动点 D 满足 $\left|\overrightarrow{CD}\right|=1$,则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|$ 的取值范围是(　　)

A．$[4,6]$　　B．$\left[\sqrt{19}-1,\sqrt{19}+1\right]$

C．$\left[2\sqrt{3},2\sqrt{7}\right]$　　D．$\left[\sqrt{7}-1,\sqrt{7}+1\right]$

【答案】D

【解析】∵动点 D 满足 $\left|\overrightarrow{CD}\right|=1$，$C(3,0)$，∴可设 $D(3+\cos\theta,\sin\theta)\ \theta\in[0,2\pi]$．又 $A(-1,0)$，$B\left(0,\sqrt{3}\right)$，∴ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\left(2+\cos\theta,\sqrt{3}+\sin\theta\right)$．∴ $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|=\sqrt{\left(2+\cos\theta\right)^{2}+\left(\sqrt{3}+\sin\theta\right)^{2}}$ $=\sqrt{8+4\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta}=\sqrt{8+2\sqrt{7}\sin\left(\theta+\phi\right)}$（其中 $\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{7}},\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{7}}$），∵ $-1\le\sin(\theta+\varphi)\le1$，∴ $\left(\sqrt{7}-1\right)^{2}=8-2\sqrt{7}\le8+2\sqrt{7}\sin(\theta+\varphi)\le8+2\sqrt{7}=\left(\sqrt{7}+1\right)^{2}$，∴ $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|$ 的取值范围是 $\left[\sqrt{7}-1,\sqrt{7}+1\right]$．故选：D.

5. 已知 O 是锐角 ΔABC 内一点，满足 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|$，$\angle A=30^{\circ}$，若 $\frac{\cos B}{\sin C}\overrightarrow{AB}+\frac{\cos C}{\sin B}\overrightarrow{AC}=2m\overrightarrow{OA}$，则实数 $m=$（　　）

官方网站：www.jidiedu.com
联系电话：55051096　18721029997　18721869997
华东总部：上海市杨浦区五角场万达广场 C 座 9 层（政通路 177 号）
上海市徐家汇中金国际广场 C 座 7 层（漕溪北路 375 号）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

【答案】D

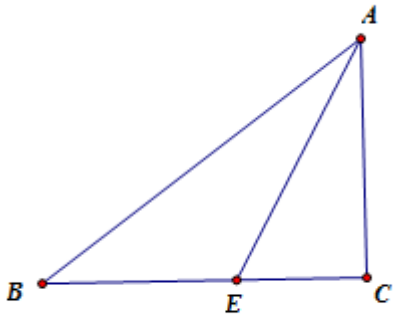
【解析】因为$\frac{\cos B}{\sin C}\overrightarrow{AB}+\frac{\cos C}{\sin B}\overrightarrow{AC}=2m\overrightarrow{OA}$,所以$\frac{\cos B}{\sin C}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\frac{\cos C}{\sin B}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=2m\overrightarrow{OA}$，两边同乘以$\overrightarrow{OA}$可得$\frac{\cos B}{\sin C}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{\cos C}{\sin B}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OA}=2m\overrightarrow{OA}^2$,设$|OA|=|OB|=|OC|=R$,由于$\angle AOB=2C,\angle AOC=2B$，所以$\frac{\cos B}{\sin C}R^2\left(\cos 2C-1\right)+\frac{\cos C}{\sin B}R^2\left(\cos 2B-1\right)=2mR^2$，所以$m=-\left(\sin B\cos C+\sin C\cos B\right)=-\sin\left(B+C\right)=-\sin A=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$，故选 D.

6. 已知O是ΔABC所在平面内一点，若对$\forall k\in R$,恒有$\left|\overrightarrow{OA}+(k-1)\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OC}\right|\geq\left|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right|$,则$\Delta ABC$一定是(　　)

A.直角三角形　　B.钝角三角形　　C.锐角三角形　　D.不确定

【答案】A

【解析】如图，在边 BC 上任取一点 E,连接 AE,那么$k\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}$,$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}$,原不等式等价于$\left|\overrightarrow{BA}-k\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BE}\right|\geq\left|\overrightarrow{AC}\right|$,又点 E 不论在任何位置都有不等式成立，所以由垂线段最短可得$AC\perp EC$,即$\angle C=90^0$,则ΔABC一定是直角三角形，故选 A.



7．已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$\left|\vec{a}\right|=2,\left|\vec{b}\right|=\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，若$(\vec{c}-2\vec{a})\cdot(\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{b})=0$，则$\left|\vec{b}-\vec{c}\right|$的最小值是(　　)

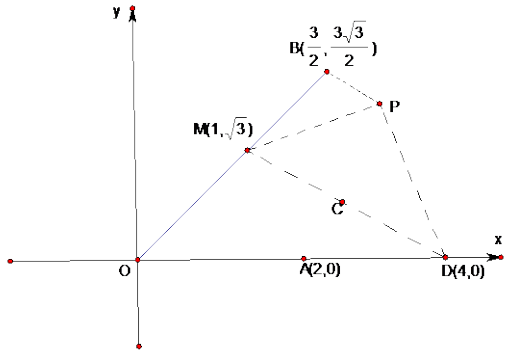
A．$2+\sqrt{3}$　　B．$2-\sqrt{3}$　　C．1　　D．2

【答案】B

【解析】建立如所示的平面直角坐标系,则由题设得$<\vec{a},\vec{b}>=60^0,\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\vec{b}=(1,\sqrt{3}),\overrightarrow{OD}=2\vec{a}=(4,0)$,

官方网站：www.jidiedu.com
联系电话：55051096　18721029997　18721869997
华东总部：上海市杨浦区五角场万达广场 C 座 9 层（政通路 177 号）
上海市徐家汇中金国际广场 C 座 7 层（漕溪北路 375 号）

再由题设$(\vec{c}-2\vec{a})\cdot(\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{b})=0$可得点$P$（向量$\vec{c}$对应的点,其中$OM=\frac{2}{3}OB, OD=2OA$）在以$MD$为直径的圆上,圆心坐标为$C(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，半径$r=\frac{1}{2}MD=\frac{1}{2}\sqrt{9+3}=\sqrt{3}$，向量$\vec{b}$对应的点为$B(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$,$|\vec{b}-\vec{c}|$的几何意义是圆上动点$P$与点$B(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$的连线段的最小值.由于$PB=\sqrt{1+3}=2$,所以$|\vec{b}-\vec{c}|$的最小值为$2-\sqrt{3}$.

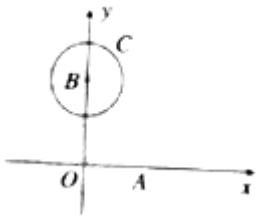


8．已知向量$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=0,|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，且$|\vec{c}-\vec{a}-2\vec{b}|=1$，则$|\vec{c}|$的最大值为(　　)

A．2　　B．4　　C．$\sqrt{5}+1$　　D．$\sqrt{3}+1$

【答案】D

【解析】设向量$\vec{a},\vec{a}+2\vec{b}$对应点分别为A、B，向量$\vec{c}$对应点C，由$|\vec{c}-\vec{a}-2\vec{b}|=1$知点$C$在以$B$为圆心，半径为1的圆上．$\therefore|\vec{c}|_{\max}=|\overrightarrow{OB}|+1=|\vec{a}+2\vec{b}|+1$ $\because|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}$ 又$\because\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=0$，$\therefore|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，$\therefore 4\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$，$\therefore|\vec{a}+2\vec{b}|^2=1+4-2=3$，$\therefore|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{3}$，$\therefore|\vec{c}|_{\max}=\sqrt{3}+1$，故选D.



9．在平行四边形$ABCD$中，$\angle BAD=60^\circ$，$AB=1$，$AD=\sqrt{3}$，P为平行四边形内一点，$AP=\frac{\sqrt{3}}{2}$，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$（$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$），则$\lambda+\sqrt{3}\mu$的最大值为(　　)

官方网站：www.jidiedu.com
联系电话：55051096　18721029997　18721869997
华东总部：上海市杨浦区五角场万达广场C座9层（政通路177号）
上海市徐家汇中金国际广场C座7层（漕溪北路375号）

A.1　　B.$\frac{3}{4}$　　C.$\sqrt{2}$　　D.$\frac{4}{3}$

【答案】A

【解析】$\because \overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，$\therefore \left|\overrightarrow{AP}\right|^2=(\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD})^2$，

即$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\lambda^2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\mu^2\left|AD\right|^2+2\lambda\mu\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|$，又$AB=1$，$AD=\sqrt{3}$，$\angle BAD=60°$，

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \frac{3}{4}=\lambda^2+3\mu^2+\sqrt{3}\lambda\mu$，

$\therefore (\lambda+\sqrt{3}\mu)^2=\frac{3}{4}+\sqrt{3}\lambda\mu\le\frac{3}{4}+(\frac{\lambda+\sqrt{3}\mu}{1})^2$，$\therefore (\lambda+\sqrt{3}\mu)^2\le 1$，

$\therefore \lambda+\sqrt{3}\mu$的最大值为1，当且仅当$\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{\sqrt{3}}{6}$取等号.

10．已知 O 为△ABC 的外心，$|\overrightarrow{AB}|=16,|\overrightarrow{AC}|=10\sqrt{2}$，若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，且$32x+25y=25$，则∠B=（　　）

A.$\frac{\pi}{3}$　　B.$\frac{\pi}{12}$　　C.$\frac{\pi}{6}$　　D.$\frac{\pi}{4}$

【答案】D

【解析】$\because \overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，$\therefore \overrightarrow{AO}^2=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}$，取$AB$中点$D$连接$OD$，$\because O$为$\Delta ABC$的外心，$\therefore OD\perp AB$，$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AO}\right|\cos\angle DAO=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|(\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|)=128$，同理$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\left|\overrightarrow{AC}\right|(\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|)=100$，$\therefore \overrightarrow{AO}^2=128x+100y=4(32x+25y)=100$，$\therefore \left|\overrightarrow{AO}\right|=10$，$\therefore \Delta ABC$的外接圆半径$r=10$，$\therefore \frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\sin B}=20$，$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\because \left|\overrightarrow{AB}\right|>\left|\overrightarrow{AC}\right|$，$\therefore \angle B$不是最大角，$\therefore B=\frac{\pi}{4}$,故选 D.

11．已知点$A(1,-1),B(4,0),C(2,2)$，平面区域D由所有满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}(1<\lambda\le a,1<\mu\le b)$的点$P(x,y)$组成的区域，若区域$D$的面积为 8，则$a+b$的最小值为(　　)

A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．4　　D．8

【答案】C

官方网站：www.jidiedu.com
联系电话：55051096　18721029997　18721869997
华东总部：上海市杨浦区五角场万达广场 C 座 9 层（政通路 177 号）
上海市徐家汇中金国际广场 C 座 7 层（漕溪北路 375 号）

【解析】由题意，得 $\overrightarrow{AB}=(3,1),\overrightarrow{AC}=(1,3)$．设 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{3\times1+3\times1}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\dfrac{3}{5}$，所以 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$．又由题意平面区域 D 的面积 $S=(a-1)|\overrightarrow{AB}|\cdot(b-1)|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin\theta=(a-1)(b-1)\times10\times\dfrac{4}{5}=8$，解得 $ab-a-b=0$，所以 $a+b=ab\le(\dfrac{a+b}{2})^2$，所以 $a+b\ge4$，故选 C.

12．若非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}-\vec{a}$ 的夹角为 120°，则 $|\vec{a}|$ 的取值范围是_____.

【答案】 $\left(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

【解析】由正弦定理得 $\dfrac{|\vec{a}|}{\sin120^\circ}=\dfrac{|\vec{b}|}{\sin\theta}\Rightarrow|\vec{a}|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sin\theta}\in(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}]$

13．在 ΔABC 中，过中线 AD 的中点 E 任作一直线分别交边 AB、AC 于 M、N 两点，设 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}\left(x,y\ne0\right)$，则 $4x+y$ 的最小值是_____.

【答案】 $\dfrac{9}{4}$

【解析】 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{4x}\overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{4y}\overrightarrow{AN}$，$\because M,E,N$ 共线，$\therefore\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{4y}=1$.

$4x+y=(4x+y)(\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{4y})=\dfrac{5}{4}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{4x}\ge\dfrac{5}{4}+2\sqrt{\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{y}{4x}}=\dfrac{9}{4}$，当且仅当 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{4x}$ 时等号成立，故最小值为 $\dfrac{9}{4}$.

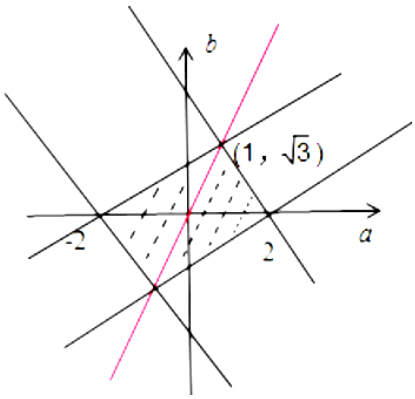
14．在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，两定点 A,B 满足 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，则点集 $\left\{P\left|\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},|\lambda|+|\mu|\le1,\lambda,\mu\in R\right.\right\}$ 所表示的区域的面积是_____.

【答案】 $4\sqrt{3}$

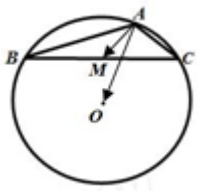
【解析】因为 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$ 所以不妨设 $\overrightarrow{OA}=\left(2,0\right),\overrightarrow{OB}=\left(m,n\right),\therefore\sqrt{m^2+n^2}=2,2m=2$，解得 $m=1$，$n=\sqrt{3}$，$\because\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},=\lambda\left(2,0\right)+\mu\left(1,\sqrt{3}\right)=\left(2\lambda+\mu,\sqrt{3}\mu\right)$，令 $a=2\lambda+\mu,b=\sqrt{3}\mu$，解得 $\mu=\dfrac{\sqrt{3}b}{3},\lambda=\dfrac{1}{2}a-\dfrac{\sqrt{3}}{6}b$，由 $|\lambda|+|\mu|\le1,\lambda,\mu\in R,$ 可得

官方网站：www.jidiedu.com
联系电话：55051096　18721029997　18721869997
华东总部：上海市杨浦区五角场万达广场 C 座 9 层（政通路 177 号）
上海市徐家汇中金国际广场 C 座 7 层（漕溪北路 375 号）

$\left|\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{6}b\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}|b|\le 1$，对 a,b 分类讨论，画出图象，可得 (a,b) 满足的区域为图中的阴影部分，可得 (a,b) 满足的区域面积为 $4\times\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，故答案为 $4\sqrt{3}$.



15. 如图，O 为△ ABC 的外心，$AB=4, AC=2, \angle BAC$ 为钝角，M 是边 BC 的中点，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AO}$ 的值(　　)



A．　4　　B.．6　　C．7　　D．　5

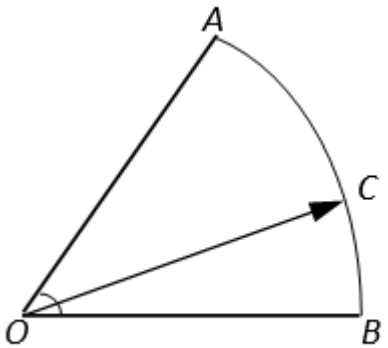
【答案】D

【解析】∵M 是 BC 边的中点，∴ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，∵O 是△ABC 的外接圆的圆心，

∴ $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AO}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\angle BAO=\frac{1}{2}\times\left(2\sqrt{3}\right)^2=6$．同理可得 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=4$.

∴ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\times(6+4)=5$.

16．如图,在扇形 OAB 中,$\angle AOB=60^\circ$,C 为弧 AB 上的一个动点.若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,求 $x+3y$ 的取值范围.



【答案】$[1,3]$

【解析】设扇形的半径为 r

考虑到 C 为弧 AB 上的一个动点，　$=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$．显然 $x,\ y\in[0,1]$

两边平方:

$$\left(\overrightarrow{OC}\right)^2=r^2=\left(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}\right)^2=x^2\cdot r^2+2xy\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+y^2\cdot r^2$$

官方网站：www.jidiedu.com
联系电话：55051096　18721029997　18721869997
华东总部：上海市杨浦区五角场万达广场 C 座 9 层（政通路 177 号）
上海市徐家汇中金国际广场 C 座 7 层（漕溪北路 375 号）

所以： $y^2+x\cdot y+x^2-1=0$,显然 $\Delta=4-3x^2>0$

得: $y=\dfrac{-x+\sqrt{4-3x^2}}{2}(y>0)$,故 $x+3y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3\sqrt{4-3x^2}}{2}$.

不妨令 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3\sqrt{4-3x^2}}{2}(x\in[0,1])$

显然在 $x\in[0,1]$ 上单调递减, $f(0)=3,\ \ f(1)=1$,得 $f(x)\in[1,3]$.

官方网站：www.jidiedu.com
联系电话：55051096　18721029997　18721869997
华东总部：上海市杨浦区五角场万达广场 C 座 9 层（政通路 177 号）
上海市徐家汇中金国际广场 C 座 7 层（漕溪北路 375 号）