数列中的解题思路

1．数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，对任意的$n\in N^*$都有$a_{n+1}=a_1+a_n+n$，则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{a_{2016}}=$（　　）

A．$\frac{2015}{2016}$　　B．$\frac{2016}{2017}$　　C．$\frac{4034}{2017}$　　D．$\frac{4032}{2017}$

【答案】D

【解析】

试题分析：由已知$a_{n+1}-a_n=n+1$，累加法可得$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，则$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，所以

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{a_{2016}}=2(1-\frac{1}{2017})=\frac{4032}{2017}$．

2．在数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$（$n\in N^*$），则$a_5=$（　）

A．$\frac{1}{3}$ B．$\frac{2}{5}$ C．$\frac{1}{2}$ D．$\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】解：由$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$，得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}$，

又∵$a_1=1$，

∴数列$\{\frac{1}{a_n}\}$是以1为首项，以$\frac{1}{2}$为公差的等差数列，

则$\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2}$，

∴$a_n=\frac{2}{n+1}$．

∴$a_5=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$．

故选：A．

3．数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n(0\le a_n<\frac{1}{2}),\\2a_n-1(\frac{1}{2}\le a_n<1),\end{cases}$若$a_1=\frac{6}{7}$，则$a_{2014}$的值是（　　）

A．$\frac{6}{7}$　　B．$\frac{5}{7}$　　C．$\frac{3}{7}$　　D．$\frac{1}{7}$

【答案】A

【解析】

试题分析：因为 $a_1=\frac{6}{7}>\frac{1}{2}$，故 $a_2=2\times\frac{6}{7}-1=\frac{5}{7}>\frac{1}{2}$，所以 $a_3=2\times\frac{5}{7}-1=\frac{3}{7}<\frac{1}{2}$，故 $a_4=2\times\frac{3}{7}=\frac{6}{7}>\frac{1}{2}$，

从而$\{a_n\}$是以 3 为周期的周期数列，故 $a_{2014}=a_{3\times671+1}=a_1=\frac{6}{7}$ ，选 A.

4．已知ΔABC的外接圆半径为 1，圆心为 0，且$3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则$\Delta ABC$的面积为　（　）

A．$\frac{8}{5}$　　　B．$\frac{7}{5}$　　　C．$\frac{6}{5}$　　　D．$\frac{4}{5}$

【答案】C

【解析】

试题分析：由题设得：$3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}=-5\overrightarrow{OC}$，$9+24\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+16=25$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$，$\angle AOB=90°$，所以$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{1}{2}$，同理$S_{\Delta OAC}=\frac{2}{5}$，$S_{\Delta OBC}=\frac{3}{10}$，所以$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta OBC}+S_{\Delta AOC}+S_{\Delta ABO}=\frac{6}{5}$. 故选 C.

5.若 $S_n=\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{7}\,(n\in\mathbf{N}^*)$，则在 $S_1,S_2,\ldots,S_{100}$ 中，正数的个数是　（　　）

A．16　　B．72　　C．86　　D．100

【答案】 C

6．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足：对于任意 $m,n\in N^*$，都有 $S_n+S_m=S_{n+m}+2n$；若 $a_1=1$，则 a_{10} =_______.

【答案】-1

【解析】解：因为数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足：对于任意 $m,n\in N^*$，都有

$S_n+S_m=S_{n+m}+2n\therefore S_1+S_m=S_{1+m}+2$

$\therefore S_{1+m}-S_m=-1$

$\therefore\{S_m\}$是等差数列，首项为1，公差为-1

$\therefore S_m=1-(m-1)=2-m\therefore S_{10}=-8$

$\therefore a_{10}=S_{10}-S_9=-8+7=-1$

7.已知数列$\{a_n\}$是等差数列，S_n是其前 n 项的和，$S_4=8,S_8=20$，则 $S_{12}=$__；

分析：注意到$S_4,S_8-S_4,S_{12}-S_8$是等差数列的连续 4 项的和，它们成等差数列.可以得到$S_{12}-S_8=16$，所以$S_{12}=36$.

8. 已知数列$\{a_n\}$是等比数列，T_n是其前n项的积，$T_4=5,T_8=20$，则$T_{12}=$__.

分析：由$T_4,\dfrac{T_8}{T_4},\dfrac{T_{12}}{T_8}$成等比，则$(\dfrac{T_8}{T_4})^2=T_4\cdot\dfrac{T_{12}}{T_8}$，所以$T_{12}=(\dfrac{T_8}{T_4})^3=64$.

9. 若$\{a_n\}$是等差数列, 若$a_m=n,\ a_n=m,$ 则有$a_{m+n}=$_______. 0

10. 若$\{a_n\}$是等差数列, 若$S_m=n,S_n=m,$ 则有$S_{m+n}=$_______. $-(m+n)$

11. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列，首项$a_1>0$，且$3a_5+5a_7=0$.若此数列的前n项和为S_n，问S_n是否存在最值？若存在，n为何值？若不存在，说明理由.

分析：对于本题来说，等差数列的基本性质用不上，可以化归为首项与公差来解决.设此数列的公差为d，则$3(a_1+4d)+5(a_1+6d)=0$，即$d=-\dfrac{4}{21}a_1$，由$a_1>0$知$d<0$，所以数列$\{a_n\}$是递减数列，故S_n有最大值而无最小值.由等差数列的通项公式知：$a_n=a_1+(n-1)(-\dfrac{4}{21}a_1)=\dfrac{25-4n}{21}a_1$，当$n\le 6$时，$a_n>0$，当$n\ge 7$时，$a_n<0$.所以$S_6$最大.综上知，当$n=6$时，$S_n$最大，不存在最小值.

12. 数列$\{a_n\}$的通项$a_n=n^2(\cos^2\dfrac{n\pi}{3}-\sin^2\dfrac{n\pi}{3})$，其前$n$项和为$S_n$. 求$S_n$.

解：（1）由于$\cos^2\dfrac{n\pi}{3}-\sin^2\dfrac{n\pi}{3}=\cos\dfrac{2n\pi}{3}$, 故

$$S_{3k}=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})$$

$$=(-\frac{1^2+2^2}{2}+3^2)+(-\frac{4^2+5^2}{2}+6^2)+\cdots+(-\frac{(3k-2)^2+(3k-1)^2}{2}+(3k)^2))$$

$$=\frac{13}{2}+\frac{31}{2}+\cdots+\frac{18k-5}{2}=\frac{k(9k+4)}{2},$$

$$S_{3k-1}=S_{3k}-a_{3k}=\frac{k(4-9k)}{2},$$

$$S_{3k-2}=S_{3k-1}-a_{3k-1}=\frac{k(4-9k)}{2}+\frac{(3k-1)^2}{2}=\frac{1}{2}-k=-\frac{3k-2}{3}-\frac{1}{6},$$

$$\text{故}\quad S_n=\begin{cases}-\dfrac{n}{3}-\dfrac{1}{6}, & n=3k-2\\ \dfrac{(n+1)(1-3n)}{6}, & n=3k-1\\ \dfrac{n(3n+4)}{6}, & n=3k\end{cases}\qquad (k\in N^*)$$

13. 已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足$(a_{n+1}+a_n)(2a_n-a_{n+1})=0$，且$a_2+a_4=2a_3+4$，其中$n\in N^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{na_n}{(2n+1)\cdot 2^n}$，是否存在正整数$m,n\ (1<m<n)$，使得$b_1,b_m,b_n$成等比数列？若存在，求出所有的$m,n$的值；若不存在，请说明理由。

（3）令$c_n=\dfrac{(n+1)^2+1}{n(n+1)a_{n+2}}$，记数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$S_n$，其中$n\in N^*$，证明：$\dfrac{5}{16}\le S_n<\dfrac{1}{2}$。

【答案】(1) $a_n=2^n$；(2) $m=2$，$n=12$．使得b_1,b_m,b_n成等比数列；(3) 见解析

【解析】

试题分析：(1) 由题意可得：$2a_n-a_{n+1}=0$，即$2a_n=a_{n+1}$，所以$\{a_n\}$是公比为2的等比数列，即可求得通项公式；(2) 假设b_1,b_m,b_n成等比数列，则$(\dfrac{m}{2m+1})^2=\dfrac{1}{3}(\dfrac{n}{2n+1})$，即$\dfrac{m^2}{4m^2+4m+1}=\dfrac{n}{6n+3}$，取倒数化简得$\dfrac{3}{n}=\dfrac{-2m^2+4m+1}{m^2}$，则$-2m^2+4m+1>0$，又因为$m\in\mathbf{N}^*$所以$m=2$，此时$n=12$．即存在；(3) 可得 $C_n=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{n\cdot 2^n}-\dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right]$，采用分组求和，$d_n=\dfrac{1}{n.2^n}-\dfrac{1}{(n+1).2^{n+1}}$ 采用裂项相消求和，即可得 $S_n=\dfrac{1}{2}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}.\dfrac{n+2}{n+1}\right]$，可证得 $1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}.\dfrac{n+2}{n+1}$为减函数，即可证得$\dfrac{5}{16}\le S_n<\dfrac{1}{2}$

试题解析：解：$(a_{n+1}+a_n)(2a_n-a_{n+1})=0$ $a_n>0$，所以有$2a_n-a_{n+1}=0$，即$2a_n=a_{n+1}$

所以数列$\{a_n\}$是公比为2的等比数列

由$a_2+a_4=2a_3+4$得$2a_1+8a_1=8a_1+4$，解得$a_1=2$。

从而，数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n\ (n\in\mathrm{N}^*)$。

（2）$b_n=\dfrac{na_n}{(2n+1)\cdot 2^n}=\dfrac{n}{2n+1}$，若$b_1,b_m,b_n$成等比数列，则$(\dfrac{m}{2m+1})^2=\dfrac{1}{3}(\dfrac{n}{2n+1})$，

即$\dfrac{m^2}{4m^2+4m+1}=\dfrac{n}{6n+3}$．由$\dfrac{m^2}{4m^2+4m+1}=\dfrac{n}{6n+3}$，可得$\dfrac{3}{n}=\dfrac{-2m^2+4m+1}{m^2}$，

所以$-2m^2+4m+1>0$，解得：$1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$。

又$m\in\mathbf{N}^*$，且$m>1$，所以$m=2$，此时$n=12$.

故当且仅当$m=2$，$n=12$. 使得b_1,b_m,b_n成等比数列。

（3）$c_n=\frac{(n+1)^2+1}{n(n+1)2^{n+2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2+2n+2}{n(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}\left[\frac{n^2+n}{n(n+1)2^{n+1}}+\frac{n+2}{n(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{n\cdot 2^n}-\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right]$

$\therefore S_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}})+\frac{1}{2}\left[(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 2^2})+(\frac{1}{2\cdot 2^2}-\frac{1}{3\cdot 2^3})+\cdots+(\frac{1}{n\cdot 2^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}})\right]$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2^2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right]=\frac{1}{2}\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right]$

易知$(\frac{1}{2})^{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}=(\frac{1}{2})^{n+1}(1+\frac{1}{n+1})$递减，

$\therefore 0<(\frac{1}{2})^{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\le(\frac{1}{2})^{1+1}\cdot\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{8}$

$\therefore\frac{5}{16}\le\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}]<\frac{1}{2}$

考点：1．求数列通项公式；2．数列求和

14．已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-2$，公差$d=3$；数列$\{b_n\}$中，S_n为其前 n 项和，满足：

$2^nS_n+1=2^n\,(n\in N_+)$

（Ⅰ）记$A_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列A_n的前n项和S；

（Ⅱ）求证：数列$\{b_n\}$是等比数列；

（Ⅲ）设数列$\{c_n\}$满足$c_n=a_nb_n$，T_n为数列$\{c_n\}$的前n项积，若数列$\{x_n\}$满足$x_1=c_2-c_1$，且

$x_n=\frac{T_{n+1}T_{n-1}-T_n^2}{T_nT_{n-1}}(n\in N_+，n\ge 2)$，求数列$\{x_n\}$的最大值.

【答案】（Ⅰ）$S=-\frac{n}{6n-4}$；

（Ⅱ）由 $2^nS_n+1=2^n$，得 $S_n=1-\frac{1}{2^n}$，所以当 $n\ge2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2^n}$，又当 $b_1=S_1=\frac{1}{2}$，符合上式，所以 $b_n=\frac{1}{2^n}(n\in N_+)$，故数列 $\{b_n\}$ 是等比数列.

（Ⅲ）$\{x_n\}$ 的最大值为 $x_1=\frac{5}{4}$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）首先由数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，可得数列 A_n 的通项公式，然后运用裂项相消法即可求得其前 n 项和；（Ⅱ）由已知 $2^nS_n+1=2^n(n\in N_+)$ 及公式 $b_n=S_n-S_{n-1}$ 可得，当 $n\ge2$ 时，b_n 的通项公式；然

后验证当 $n=1$ 时，是否满足上述通项公式，进而求出 b_n 的通项公式即可证明结论成立；

（Ⅲ）根据作差法判断数列 $\{x_n\}$ 的单调性，进而判断数列 $\{x_n\}$ 的最大值即可.

试题解析：（Ⅰ）因为 $a_n=3n-5$，

所以 $A_n=\frac{1}{(3n-5)(3n-2)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n-2})$，

所以 $S=\frac{1}{3}\left[(-\frac{1}{2}-1)+(1-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{3n-8}-\frac{1}{3n-5})+(\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n-2})\right]$

$=\frac{1}{3}(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3n-2})=-\frac{n}{6n-4}$.

（Ⅱ）由 $2^nS_n+1=2^n$，得 $S_n=1-\frac{1}{2^n}$，

所以当 $n\ge2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2^n}$，

又当 $b_1=S_1=\frac{1}{2}$，符合上式，所以 $b_n=\frac{1}{2^n}(n\in N_+)$，

故数列 $\{b_n\}$ 是等比数列.

（Ⅲ）因为 $c_n=\frac{3n-5}{2^n}$，所以 $x_1=c_2-c_1=\frac{5}{4}$，

当 $n\ge2$ 时，$x_n=\frac{T_{n+1}T_{n-1}-T_n^2}{T_nT_{n-1}}=\frac{T_{n+1}}{T_n}-\frac{T_n}{T_{n-1}}=c_{n+1}-c_n=\frac{8-3n}{2^{n+1}}$，

又 $x_1=\frac{5}{4}$ 符合上式，所以 $x_n=\frac{8-3n}{2^{n+1}}(n\in N_+)$，……12 分

因为 $x_{n+1}-x_n=\frac{5-3n}{2^{n+2}}-\frac{8-3n}{2^{n+1}}=\frac{3n-11}{2^{n+2}}$，所以当 $n\le3$ 时，$\{x_n\}$ 单调递减，

当 $n\ge4$ 时，$\{x_n\}$ 单调递增，但当 $n\ge4$ 时，$\{x_n\}$ 每一项均小于 0，

所以 $\{x_n\}$ 的最大值为 $x_1=\frac{5}{4}$.