椭圆、抛物线、双曲线

1．设 F 为抛物线 $y^2=16x$ 的焦点，A,B,C 为该抛物线上三点，若 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$，则 $\left|\overrightarrow{FA}\right|+\left|\overrightarrow{FB}\right|+\left|\overrightarrow{FC}\right|$ 的值为（　　）

A．36　　B．24　　C．16　　D．12

【答案】B

【解析】

试题分析：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，抛物线焦点坐标为 $F(4,0)$，准线方程 $x=-4$，

$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$，$\therefore$ 点 F 为 ΔABC 重心，则 $x_1+x_2+x_3=12$，$y_1+y_2+y_3=0$，而

$|FA|=x_1-(-4)=x_1+4$，$|FB|=x_2-(-4)=x_2+4$，$|FC|=x_3-(-4)=x_3+4$，

$\therefore\left|\overrightarrow{FA}\right|+\left|\overrightarrow{FB}\right|+\left|\overrightarrow{FC}\right|=12+12=24$．

考点：抛物线简单几何性质．

2．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_1 作圆 $x^2+y^2=a^2$ 的切线分别交双曲线的左、右两支于点 B,C，且 $\left|BC\right|=\left|CF_2\right|$，则该双曲线的渐近线方程为（　　）

A．$y=\pm3x$　　B．$y=\pm2\sqrt{2}x$

C．$y=\pm(\sqrt{3}+1)x$　　D．$y=\pm(\sqrt{3}-1)x$

【答案】C

【解析】

试题分析：设过 F_1 的切线分别交双曲线的左、右两支于点 B,C，且 $\left|BC\right|=\left|CF_2\right|$，故 $\left|BF_1\right|=2a$，设切点为 T，$B(x,y)$，则利用三角形相似可得 $\dfrac{y}{a}=\dfrac{c+x}{b}=\dfrac{2a}{c}$，所以 $x=\dfrac{2ab-c^2}{c},y=\dfrac{2a^2}{c}$，代入双曲线方程整理得 $b=(\sqrt{3}+1)a$，所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm(\sqrt{3}+1)x$，故选 C.

3．已知 F 为抛物线 $y^2=x$ 的焦点，点 A、B 在该抛物线上且位于 x 轴的两侧，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$（其中 O 为坐标原点），则 ΔABO 与 ΔAFO 面积之和的最小值是（　　）

A. 2　　B. 3　　C. $\dfrac{17\sqrt{2}}{8}$　　D. $\sqrt{10}$

【答案】B

官方网站：www.jidiedu.com
联系电话：55051096　18721029997　18721869997
华东总部：上海市杨浦区五角场万达广场 C 座 9 层（政通路 177 号）
上海市徐家汇中金国际广场 C 座 7 层（漕溪北路 375 号）

【解析】试题分析：据题意得 $F(\frac{1}{4},0)$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1=y_1^2,x_2=y_2^2$，$y_1^2y_2^2+y_1y_2=2,y_1y_2=-2$ 或 $y_1y_2=1$，因为 A,B 位于 x 轴两侧所以．所以 $y_1y_2=-2$ 两面积之和为

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times|y_1|$$

$$=\frac{1}{2}|y_1^2y_2-y_2^2y_1|+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times|y_1|=|y_2-y_1|+\frac{1}{8}\times|y_1|=\left|\frac{2}{y_1}+y_1\right|+\frac{1}{8}\times|y_1|=\left|\frac{2}{y_1}+\frac{9}{8}y_1\right|=\left|\frac{2}{y_1}\right|+\left|\frac{9}{8}y_1\right|\geq 3\cdot$$

考点：1、抛物线；2、三角形的面积；3、基本不等式．

4．在平面直角坐标系 xOy 中，点 M 到点 $F(1,0)$ 的距离比它到 y 轴的距离大 1．

（1）求点 M 的轨迹 C 的方程；

（2）若在 y 轴右侧，曲线 C 上存在两点关于直线 $x-2y-m=0$ 对称，求 m 的取值范围．

【答案】（1）$y^2=4x(x\geq 0)$ 或 $y=0(x<0)$；（2）$\left(\frac{9}{4},+\infty\right)$

【解析】试题解析：（1）设点 M 的坐标为 (x,y)．

由题意，$|MF|=|x|+1$，即 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x|+1$

化简得，$y^2=4x(x\geq 0)$ 或 $y=0(x<0)$，

$\therefore$ 点 M 的轨迹 C 的方程为 $y^2=4x(x\geq 0)$ 或 $y=0(x<0)$．

（2）设曲线 C 上的两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)(x_1>0,x_2>0)$ 关于直线 $x-2y-m=0$ 对称，则可设直线 AB 的方程为 $2x+y+n=0$．

由 $\begin{cases}2x+y+n=0\\ y^2=4x\end{cases}$ 得 $y^2+2y+2n=0$，

则 $4-8n>0$ 且 $y_1+y_2=-2$．

$\therefore n<\frac{1}{2}$，线段 AB 的中点为 $P\left(\frac{1-n}{2},-1\right)$

$\because P$ 在直线 $x-2y-m=0$ 上，$\therefore \frac{1-n}{2}+2-m=0,m=\frac{5}{2}-\frac{n}{2}$．

$\because n<\frac{1}{2}$，$\therefore m>\frac{9}{4}$．

即 m 的取值范围为 $\left(\frac{9}{4},+\infty\right)$

5．已知圆 $M:(x+1)^2+y^2=1$，圆 $N:(x-1)^2+y^2=9$，动圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切，圆心 P 的轨迹为曲线 C.

（1）求 C 的方程；

（2）若直线 $y=k(x-1)$ 与曲线 C 交于 R,S 两点，问是否在 x 轴上存在一点 T，使得当 k 变动时总有 $\angle OTS=\angle OTR$？若存在，请说明理由.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(x\neq-2)$（2）$T(4,0)$

【解析】试题解析：（1）得圆 M 的圆心为 $M(-1,0)$，半径 $r_1=1$；圆 N 的圆心 $N(1,0)$，半径 $r_2=3$.设圆 P 的圆心为 $P(x,y)$，半径为 R.因为圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切，所以 $|PM|+|PN|=R+r_1+r_2-R=r_1+r_2=4$

由椭圆的定义可知，曲线C是以 M,N 为左右焦点，长半轴长为2，短半轴为 $\sqrt{3}$ 的椭圆（左顶点除外），其方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(x\neq-2)$

（2）假设存在 $T(t,0)$ 满足 $\angle OTS=\angle OTR$.设 $R(x_1,y_1),S(x_2,y_2)$

联立 $\begin{cases}y=k(x-1)\\3x^2+4y^2-12=0\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，由韦达定理有 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}\\x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}\end{cases}$ ①，

其中 $\Delta>0$ 恒成立，由 $\angle OTS=\angle OTR$（TS,TR 的斜率存在），故 $k_{TS}+k_{TR}=0$，即 $\dfrac{y_1}{x_1-t}+\dfrac{y_2}{x_2-t}=0$ ②，

由 R,S 两点在直线 $y=k(x-1)$ 上，故 $y_1=k(x_1-1),y_2=k(x_2-1)$ 代入②得：

$\dfrac{k(x_1-1)(x_2-t)+k(x_2-1)(x_1-t)}{(x_1-t)(x_2-t)}=\dfrac{k[2x_1x_2-(t+1)(x_1+x_2)+2t]}{(x_1-t)(x_2-t)}=0$ 即有

$2x_1x_2-(t+1)(x_1+x_2)+2t=0$ ③

将①代入③即有：$\dfrac{8k^2-24-(t+1)8k^2+2t(3+4k^2)}{3+4k^2}=\dfrac{6t-24}{3+4k^2}=0$ ④，要使得④与 k 的取值无关，当且仅当“$t=4$”时成立，综上所述存在 $T(4,0)$，使得当 k 变化时，总有 $\angle OTS=\angle OTR$