

数形结合思想

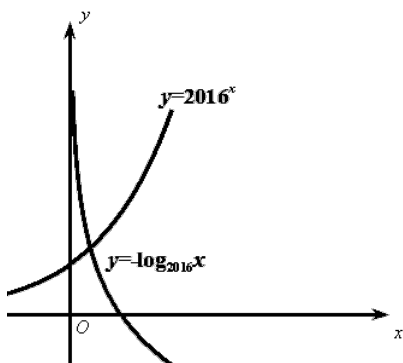
类型一 利用数形结合思想讨论方程的根、函数的零点

例 1. $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) = 2016^x + \log_{2016} x$ ，则函数 $f(x)$ 的零点的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【解析】作出函数 $y = 2016^x$, $y = -\log_{2016} x$ 的图象，可知函数 $f(x) = 2016^x + \log_{2016} x$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 内存在一个零点，又因为 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，所以 $f(x)$ 在 $x \in (-\infty, 0)$ 上只有一个零点，又 $f(0) = 0$ ，所以函数 $f(x)$ 的零点的个数是 3 个，故选 C.



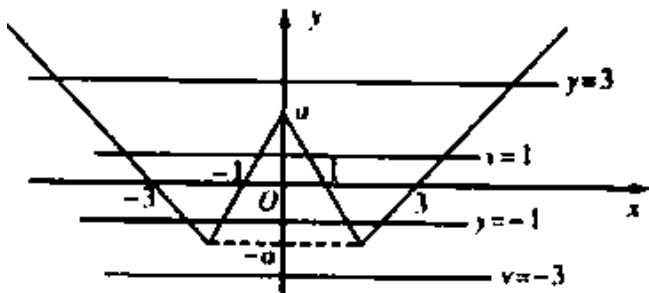
类型二 利用数形结合思想解不等式或求参数范围

例 2. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = a|x-2| - a$ ，其中 $a > 0$ 为常数. 若函数 $y = f[f(x)]$ 有 10 个零点，则 a 的取值范围是_____.

分析：首先由已知得函数的图像，根据 $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 上的解析式画出 $f(x)$ 的图像，利用图像解决问题.

【答案】(1, 3)

【解析】当 $x \geq 0$ 时，令 $f(x) = 0$ ，得 $|x-2| = 1$ ，即 $x = 1$ 或 3 . 因为 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(x)$ 的零点为 $x = \pm 1$ 和 ± 3 . 令 $f[f(x)] = 0$ ，则 $f(x) = \pm 1$ 或 $f(x) = \pm 3$. 因为函数 $y = f[f(x)]$ 有 10 个零点，则函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = \pm 1$ 和 $y = \pm 3$ 共有 10 个交点. 由图可知， $1 < a < 3$.



类型三 利用数形结合思想求最值

“形”可以使某些抽象问题具体化，而“数”可以使思维精确化，应用数形结合在某些求最值问题中，可以收到意想不到的效果。

例 3. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x - y - 6 \leq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$ ，若目标函数 $z = ax + by (a, b > 0)$ 的最大值是 12，则 $a^2 + b^2$ 的

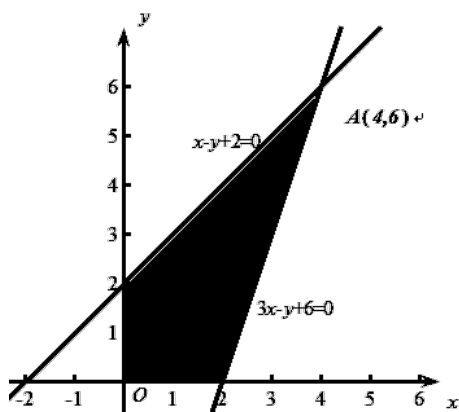
最小值是 ()

- A. $\frac{6}{13}$ B. $\frac{36}{5}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{36}{13}$

分析：首先由已知画出可行域，根据可行域 $a^2 + b^2$ 的意义来求出最小值。

【答案】D

【解析】满足约束条件的区域如图所示，



目标函数 $z = ax + by (a, b > 0)$ 在过 $A(4,6)$ 时， z 取得最大值 12，即 $12 = 4a + 6b$ ， $\therefore 6 = 2a + 3b$ ，而

$a^2 + b^2$ 的最小值表示点 (a, b) 与 $(0,0)$ 两点间距离的平方的最小值， $\therefore d^2 = \frac{6^2}{(\sqrt{4+9})^2} = \frac{36}{13}$ 。

点评：一般地，在解决简单线性规划问题时，如果目标函数 $z = Ax + By$ ，首先，作直线 $y = -\frac{A}{B}x$ ，并将

其在可行区域内进行平移；当 $B > 0$ 时，直线 $y = -\frac{A}{B}x$ 在可行域内平移时截距越高，目标函数值越大，截

距越低，目标函数值越小；当 $B < 0$ 时，直线 $y = -\frac{A}{B}x$ 在可行域内平移时截距越低，目标函数值越大，截

距越高，目标函数值越小。

类型四 运用数形结合思想解决解析几何中的问题

例 4. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，直线 $y = 4$ 与 y 轴的交点为 P ，与抛物线 C 的交点为 Q ，且 $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$ 。已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F_1 与抛物线 C 的焦点重合，且离心率为 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 求抛物线 C 和椭圆 E 的方程；

(2) 若过椭圆 E 的左焦点 F_2 的直线 l 与椭圆交于 A, B 两点，求三角形 OAB (O 为坐标原点) 的面积 $S_{\triangle OAB}$ 的最大值。

解析：(1) 设 $Q(x_0, 4)$ ，代入 $y^2 = 2px (p > 0)$ ，得 $x_0 = \frac{8}{p}$ ， $\therefore |PQ| = \frac{8}{p}$ ，又 $|QF| = |PQ| + \frac{p}{2} = \frac{5}{4}|PQ|$ ，

$\frac{8}{p} + \frac{p}{2} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{p}$ ， $\therefore p = 2$ 。 $\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$ 。在椭圆 E 中， $c = 1, \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ， $\therefore$ (2) 由题意

$a = 2, b^2 = a^2 - c^2 = 3$ 。椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

可知，设直线 AB 的方程为 $x = my - 1$ ，且 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，由 $\begin{cases} x = my - 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得

$$(3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0, \quad y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2 + 4}, \quad y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4},$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OF_2| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = 6 \sqrt{\frac{m^2 + 1}{(3m^2 + 4)^2}}, \quad \text{令 } m^2 + 1 = t, \text{ 则}$$

$$t \geq 1, \quad S_{\triangle OAB} = 6 \sqrt{\frac{t}{(3t+1)^2}} = 6 \sqrt{\frac{1}{9t + \frac{1}{t} + 6}}, \quad \text{又 } \because g(t) = 9t + \frac{1}{t} \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单调递增, } \therefore$$

$$g(t) \geq g(1) = 10. \quad \therefore S_{\triangle OAB} \text{ 的最大值为 } \frac{3}{2}.$$