

## 函数的奇偶性与单调性

1. 已知定义在  $R$  上的奇函数  $f(x)$  满足: 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x^3$ , 若不等式  $f(-4t) > f(2m + mt^2)$  对任意实数  $t$  恒成立, 则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, -\sqrt{2})$   
B.  $(-\sqrt{2}, 0)$   
C.  $(-\infty, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$   
D.  $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

【答案】A

【解析】

试题分析: 当  $x < 0$  时,  $f(x) = -f(-x) = x^3 \Rightarrow f(x) = x^3 (x \in R) \Rightarrow f(x)$  在  $R$  上是增函数

$\Rightarrow -4t > 2m + mt^2$  对任意实数  $t$  恒成立  $\Rightarrow -4t > mt^2 + 4t + 2m$  对任意实数  $t$  恒成立

$\Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta 16 - 8m^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in (-\infty, -\sqrt{2})$ , 故选 A.

2. 已知  $f(x)$  是奇函数并且是  $R$  上的单调函数, 若函数  $y = f(x^2 + 2) + f(-2x - m)$  只有一个零点, 则函数

$g(x) = mx + \frac{4}{x-1} (x > 1)$  的最小值是 ( )

- A. 3  
B. -3  
C. 5  
D. -5

【答案】C

【解析】试题分析: 由于函数为奇函数且单调, 故  $f(x^2 + 2) + f(-2x - m) = 0$  等价于

$f(x^2 + 2) = f(2x + m)$ , 即  $x^2 + 2 = 2x + m$  有唯一解, 判别式为零, 即  $4 - 4(2 - m) = 0, m = 1$ , 所以

$$g(x) = x + \frac{4}{x-1} = x - 1 + \frac{4}{x-1} + 1 \geq 5.$$

考点: 函数的单调性与奇偶性.

3. 已知定义在  $R$  上的函数  $f(x)$  是奇函数, 且  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上是减函数,  $f(2) = 0, g(x) = f(x+2)$ ,

则不等式  $xg(x) \leq 0$  的解集是 ( )

- A.  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$   
B.  $[-4, -2] \cup [0, +\infty)$   
C.  $(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$   
D.  $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$

【答案】C

【解析】试题分析：由于  $g(x) = f(x+2)$  是  $f(x)$  向左平移 2 个单位得到，结合函数的图象可知当  $x \leq -4$  或  $x \geq -2$ ，纵横坐标的积不大于 0，即应选 C.

考点：函数的图象与单调性、奇偶性的运用.

4. 已知  $f(x)$  是定义在  $[-1,1]$  上的奇函数，且  $f(1)=1$ ，若  $m, n \in [-1,1]$ ,  $m+n \neq 0$  时，有  $\frac{f(m)+f(n)}{m+n} > 0$ .

(1) 证明  $f(x)$  在  $[-1,1]$  上是增函数；

(2) 解不等式  $f(x^2-1) + f(3-3x) < 0$ ；

(3) 若  $f(x) \leq t^2 - 2at + 1$  对  $\forall x \in [-1,1], a \in [-1,1]$  恒成立，求实数  $t$  的取值范围.

【答案】(1) 证明见解析；(2)  $\left(1, \frac{4}{3}\right]$ ；(3)  $t \geq 2$  或  $t \leq -2$  或  $t = 0$ .

【解析】

试题分析：(1) 利用定义法任取  $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$  得  $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) + f(-x_2)$

$= \frac{f(x_1) + f(-x_2)}{x_1 - x_2} (x_1 - x_2)$  因为  $\frac{f(x_1) + f(-x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ,  $x_1 - x_2 < 0$  即可证明  $f(x_1) < f(x_2)$ ；(2) 根据

函数单调性确定  $\begin{cases} x^2 - 1 < 3x - 3 \\ -1 \leq x^2 - 1 \leq 1 \\ -1 \leq 3x - 3 \leq 1 \end{cases}$  即可解得  $x \in \left(1, \frac{4}{3}\right]$ ；(3) 因为  $f(x)$  在  $[-1,1]$  是单调递增函数且

$f(x)_{\max} = 1$ ，所以只要  $f(x)$  的最大值小于等于  $t^2 - 2at + 1$  即  $t^2 - 2at + 1 \geq 1$ ，然后即可求得  $t$  的范围.

试题解析：(1) 任取  $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ ,

则  $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) + f(-x_2) = \frac{f(x_1) + f(-x_2)}{x_1 - x_2} (x_1 - x_2)$

$\because -1 \leq x_1 < x_2 \leq 1, \therefore x_1 + (-x_2) \neq 0$ ，由已知  $\frac{f(x_1) + f(-x_2)}{x_1 - x_2} > 0, x_1 - x_2 < 0$

$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$ ，即  $f(x)$  在  $[-1,1]$  上是增函数

(2) 因为  $f(x)$  是定义在  $[-1,1]$  上的奇函数，且在  $[-1,1]$  上是增函数

不等式化为  $f(x^2-1) < f(3x-3)$ ，所以

$$\begin{cases} x^2 - 1 < 3x - 3 \\ -1 \leq x^2 - 1 \leq 1, \text{ 解得 } x \in \left(1, \frac{4}{3}\right] \\ -1 \leq 3x - 3 \leq 1 \end{cases}$$

(3) 由 (1) 知  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上是增函数，所以  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上的最大值为  $f(1) = 1$ ,

要使  $f(x) \leq t^2 - 2at + 1$  对  $\forall x \in [-1, 1], a \in [-1, 1]$  恒成立，只要  $t^2 - 2at + 1 \geq 1 \Rightarrow t^2 - 2at \geq 0$

设  $g(a) = t^2 - 2at$ , 对  $\forall a \in [-1, 1], g(a) \geq 0$  恒成立,

$$\text{所以 } \begin{cases} g(-1) = t^2 + 2t \geq 0 \\ g(1) = t^2 - 2t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \text{ 或 } t \leq -2 \\ t \geq 2 \text{ 或 } t \leq 0 \end{cases}$$

所以  $t \geq 2$  或  $t \leq -2$  或  $t = 0$

考点: (1) 函数单调性; (2) 函数奇偶性; (3) 含参数不等式的解法.