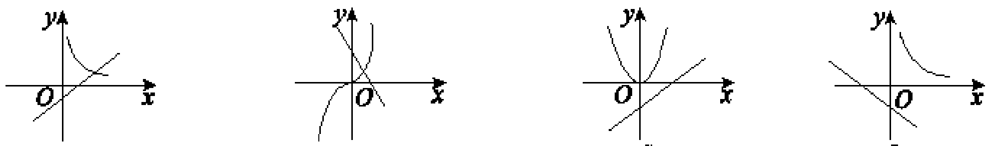
幂函数

1．在同一坐标系内，函数 $y=x^{a}(a\neq 0)$ 和 $y=ax-\dfrac{1}{a}$ 的图象可能是（　　）



A　　　B　　　C　　　D

【答案】C

【解析】当 a<0 时，函数 y＝ax－$\dfrac{1}{a}$是减函数，且在 y 轴上的截距－$\dfrac{1}{a}$>0，结合图象排除 A，C，D，又 y＝x^a在(0，+∞)上是减函数，∴B 项也不正确．当 a>0 时，y＝ax－$\dfrac{1}{a}$是增函数，－$\dfrac{1}{a}$<0，结合图象排除 B，D 选项，当 a>0 时，y＝x^a在(0，+∞)上是增函数，故 A 项不正确，故选 C.

考点：幂函数的单调性与奇偶性综合.

2．已知幂函数 $f\left(x\right)=x^{-\frac{1}{2}}$，若 $f\left(a+1\right)<f\left(10-2a\right)$，则实数 a 的取值范围是________．

【答案】(3，5)

【解析】f(x)＝$x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$(x>0)，易知 f(x)在(0，+∞)上为减函数，又 f(a+1)<f(10−2a)，

$$\therefore\begin{cases}a+1>0,\\10-2a>0,\\a+1>10-2a,\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}a>-1,\\a<5,\\a>3,\end{cases}\quad\therefore 3<a<5.$$

考点：幂函数的单调性.

3．已知幂函数 $f(x)=\left(k^{2}+k-1\right)x^{(2-k)(1+k)}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增.

（1）求实数 k 的值，并写出相应的函数 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（2）对于（1）中的函数 $f\left(x\right)$，试判断是否存在正数 m，使函数 $g\left(x\right)=1-mf\left(x\right)+\left(2m-1\right)x$，在区间 $\left[0,1\right]$ 上的最大值为 5，若存在，求出 m 的值；若不存在，请说明理由.

【答案】（1）$k=1$，$f\left(x\right)=x^{2}$；（2）$m=\dfrac{5}{2}+\sqrt{6}$.

【解析】

解：（1）因为幂函数 $f(x)=(k^{2}+k-1)x^{(2-k)(1+k)}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore\left(2-k\right)\left(1+k\right)>0\Rightarrow -1<k<2,\ k^{2}+k-1=1,\therefore k=-2$或$k=1$

所以 $k=1$，$f\left(x\right)=x^{2}$；所以 $f\left(x\right)=x^{2}$.

官方网站：www.jidiedu.com
联系电话：55051096　18721029997　18721869997
华东总部：上海市杨浦区五角场万达广场 C 座 9 层（政通路 177 号）
上海市徐家汇中金国际广场 C 座 7 层（漕溪北路 375 号）

（2）$\because g\left(x\right)=1-mf\left(x\right)+\left(2m-1\right)x=-mx^2+\left(2m-1\right)x+1$，

$\because m>0$，$\because g\left(x\right)$开口方向向下，对称轴$x=\dfrac{2m-1}{2m}=1-\dfrac{1}{2m}<1$

又$\because g\left(0\right)=1, g\left(x\right)$在区间［0，1］上的最大值为5，

$$\therefore\begin{cases}1-\dfrac{1}{2m}>0\\ g\left(1-\dfrac{1}{2m}\right)=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>\dfrac{1}{2}\\ m=\dfrac{5\pm2\sqrt{6}}{2}\end{cases}\quad\therefore m=\frac{5}{2}+\sqrt{6}$$

考点：幂函数的性质；一元二次函数的图像和性质.

4．已知幂函数$f(x)=x^{-2m^2-m+3}$，其中$-2<m<2$，$m\in Z$，满足：

(1)　$f(x)$是区间$\left(0,+\infty\right)$上的增函数；

(2)对任意的$x\in R$，都有$f(-x)+f(x)=0$.

求同时满足条件(1)、(2)的幂函数$f\left(x\right)$的解析式，并求$x\in\left[0,3\right]$时，$f\left(x\right)$的值域.

【解析】因为−2<m<2，m∈Z，所以m=−1，0，1.
因为对任意的x∈R，都有f(−x)+f(x)=0，即f(−x)=−f(x)，所以f(x)是奇函数.
当m=−1时，f(x)=x^2只满足条件(1)而不满足条件(2)；
当m=1时，f(x)=x^0，条件(1)、(2)都不满足；
当m=0时，f(x)=x^3，条件(1)、(2)都满足，当x∈[0，3]时，函数f(x)的值域为[0，27].
考点：幂函数的单调性与奇偶性.