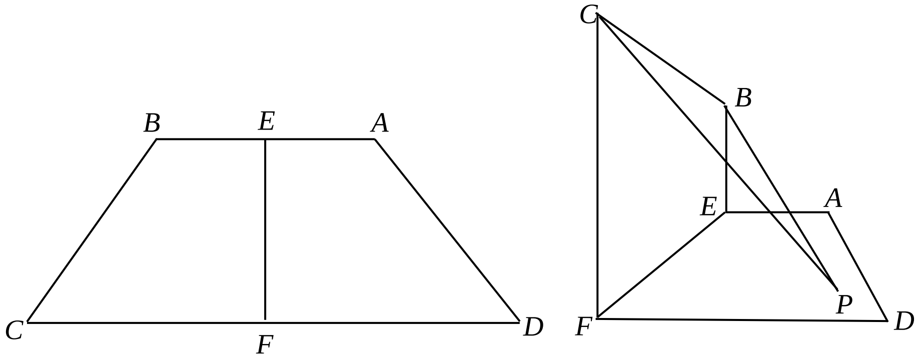
轨迹问题

1．如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB=\frac{1}{2}CD$，E, F 分别是底边 AB,CD 的中点，把四边形 $BEFC$ 沿直线 EF 折起，使得面 $BEFC\perp$ 面 $ADFE$，若动点 $P\in$ 平面 $ADFE$，设 PB,PC 与平面 $ADFE$ 所成的角分别为 θ_1,θ_2（θ_1,θ_2 均不为 0）．若 $\theta_1=\theta_2$，则动点 P 的轨迹为（　　）



A．直线　　B．椭圆　　C．圆　　D．抛物线

【答案】C

【解析】

试题分析：由折叠过程知 BE、FC 都与平面 $ADEF$ 垂直，因此 $\angle BPE=\theta_1$，$\angle CPF=\theta_2$，则 $PE=\frac{BE}{\tan\theta_1}$，$PF=\frac{CF}{\tan\theta_2}$，由已知有 $CF=2BE$，又 $\theta_1=\theta_2$，所以 $PF=2PE$，在平面 $ADFE$ 上建立直角坐标系，设 $E(-a,0),F(a,0)$，$P(x,y)$，则有 $\sqrt{(x-a)^2+y^2}=2\sqrt{(x+a)^2+y^2}$，化简得 $(x+\frac{5}{3}a)^2+y^2=\frac{25a^2}{9}$，因此 P 点轨迹是圆．故选 C．

2．设 M 是圆 P：$(x+5)^2+y^2=36$ 上一动点，点 Q 的坐标为（5，0），若线段 MQ 的垂直平分线交直线 PM 于点 N，则点 N 的轨迹方程为（　）

A．$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　　B．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$　　C．$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$　　D．$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

【答案】D

【解析】

试题分析：由已知作出图象，结合图象得|NQ|－|NP|=6，Q（5，0），P（－5，0），|PQ|=10>6，由此能求出点 N 的轨迹．

解：∵M 是圆 P：$(x+5)^2+y^2=36$ 上一动点，点 Q 的坐标为（5，0），线段 MQ 的垂直平分线交直线 PM 于点 N，

∴|MN|=|NQ|，|NQ|－|NP|=|MP|，

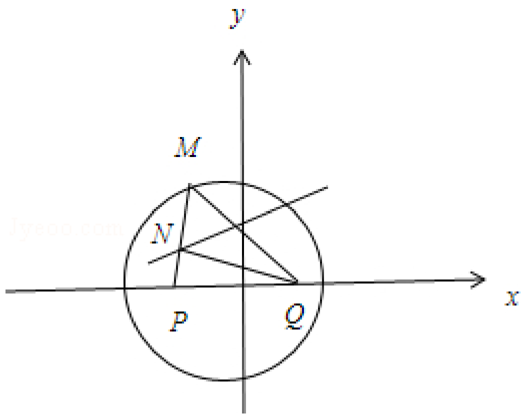
∵M 是圆 P：$(x+5)^2+y^2=36$ 上一动点，点 Q 的坐标为（5，0），

∴|MP|=6，∴|NQ|﹣|NP|=6，

∵Q（5，0），∴P（﹣5，0），|PQ|=10>6，

∴点N的轨迹为双曲线，a=3，c=5，b=4，

∴点N的轨迹方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$．故选：D．



3．已知动点P与双曲线$x^2-y^2=1$的两个焦点F_1,F_2的距离之和为定值，且$\cos\angle F_1PF_2$的最小值为$-\frac{1}{3}$，则动点P的轨迹方程为______________.

【答案】$\frac{x^2}{3}+y^2=1$

【解析】

试题分析：双曲线焦点为$F_1\left(-\sqrt{2},0\right),F_2\left(\sqrt{2},0\right)$，$c=\sqrt{2}$，设$\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=2a,2a>2c,a>\sqrt{2}$，由余弦定理得$\cos\angle F_1PF_2=\frac{\left|PF_1\right|^2+\left|PF_2\right|^2-4c^2}{2\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|}=\frac{2a^2-4}{\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|}-1$，由于$\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|\le\left(\frac{\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|}{2}\right)^2=a^2$，

所以$\frac{2a^2-4}{\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|}-1\ge\frac{2a^2-4}{a^2}-1=-\frac{1}{3},a^2=3,b^2=a^2-c^2=1$，椭圆方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

4. 在ΔABC中，点A,B的坐标分别是$\left(-\sqrt{2},0\right),\left(\sqrt{2},0\right)$，点$G$是$\Delta ABC$的重心，$y$轴上一点$M$满足$GM\,//\,AB$，且$\left|MC\right|=\left|MB\right|$.

（Ⅰ）求ΔABC的顶点C的轨迹E的方程;

（Ⅱ）直线$l:y=kx+m$与轨迹E相交于P,Q两点，若在轨迹E上存在点R，使四边形$OPRQ$为平行四

边形（其中O为坐标原点），求m的取值范围.

【答案】（Ⅰ）$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{6}=1\left(y\neq 0\right)$；（Ⅱ）$(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{2}]\cup[\dfrac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）根据重心的性质得G点坐标，从而得到M点坐标，进而由两点间的距离公式求得轨迹方程；（Ⅱ）设直线$l:y=kx+m$，联立椭圆方程，结合韦达定理得到R点坐标，又由点R在椭圆上，得到m,k的关系式，从而根据$\Delta>0$得m的取值范围.

试题解析：（Ⅰ）设$C\left(x,y\right)$，

因为点G是ΔABC的重心，故G点坐标为$\left(\dfrac{x}{3},\dfrac{y}{3}\right)$，$\therefore M\left(0,\dfrac{y}{3}\right)$

由$\left|MC\right|=\left|MB\right|$得$\therefore x^2+\left(\dfrac{2}{3}y\right)^2=2+\left(\dfrac{y}{3}\right)^2$，

即$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{6}=1\left(y\neq 0\right)$

$\therefore \Delta ABC$的顶点C的轨迹E的的方程是$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{6}=1\left(y\neq 0\right)$

（Ⅱ）设直线$l:y=kx+m$与$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{6}=1$的两交点为$P\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(x_2,y_2\right)$

联立：$\begin{cases}y=kx+m\\3x^2+y^2=6\end{cases}$消去$y$得：$\left(3+k^2\right)x^2+2kmx+m^2-6=0$

$\therefore \Delta=4k^2m^2-4\left(k^2+3\right)\left(m^2-6\right)=12\left(2k^2-m^2+6\right)>0$（1）

且$x_1+x_2=-\dfrac{2km}{k^2+3},x_1x_2=\dfrac{m^2-6}{k^2+3}$.

因为四边形$OPRQ$为平行四边形，所以线段PQ的中点即为线段OR的中点，所以R点的坐标为$\left(x_1+x_2,y_1+y_2\right)$，整理得$R\left(\dfrac{-2km}{k^2+3},\dfrac{6m}{k^2+3}\right)$

由点R在椭圆上，所以$\dfrac{\left(\dfrac{-2km}{k^2+3}\right)^2}{2}+\dfrac{\left(\dfrac{6m}{k^2+3}\right)^2}{6}=1$，整理得$2m^2=k^2+3$（2）

将（2）代入（1）得$m^2>0$，$\therefore m\neq 0$，由（2）得$2m^2\geq 3$，$\therefore m\geq \frac{\sqrt{6}}{2}$或$m\leq -\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以m的取值范围为$(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$．