

函数零点

1. 已知实数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ \lg(-x), & x < 0 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f^2(x) + f(x) + t = 0$ 有三个不同的实根，则 t 的取值范围为_____.

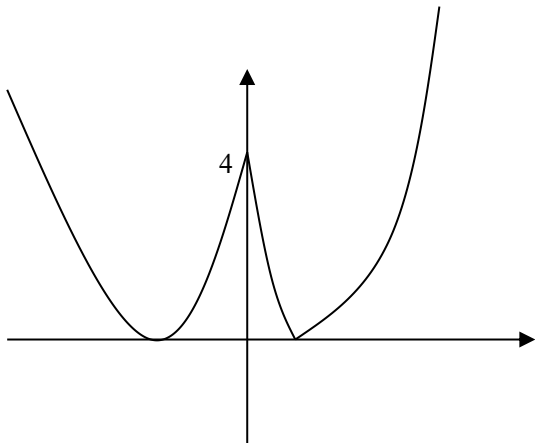
【答案】 $(-\infty, -2]$

【解析】 原问题等价于 $f^2(x) + f(x) = -t$ 有三个不同的实根，即 $y = -t$ 与 $y = f^2(x) + f(x)$ 有三个不同的交点，当 $x \geq 0$ 时， $y = f^2(x) + f(x) = e^{2x} + e^x$ 为增函数，在 $x = 0$ 处取得最小值为 2，与 $y = -t$ 只有一个交点. 当 $x < 0$ 时， $y = f^2(x) + f(x) = \lg^2(-x) + \lg(-x)$ ，根据复合函数的单调性，其在 $(-\infty, 0)$ 上先减后增. 所以，要有三个不同交点，则需 $-t \geq 2$ ，解得 $t \leq -2$.

2. 设定义域为 R 的函数 $f(x) = \begin{cases} 5^{|x-1|} - 1, & x \geq 0, \\ x^2 + 4x + 4, & x < 0 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f^2(x) - (2m+1)f(x) + m^2 = 0$ 有 7 个不同的实数解，则 $m =$ _____.

【答案】 2

【解析】 由图可知方程 $t^2 - (2m+1)t + m^2 = 0$ 有两个不等实根，其中一根为 4，另一根在 $(0, 4)$ ；由 $4^2 - (2m+1) \times 4 + m^2 = 0 \Rightarrow m = 2$ 或 $m = 6$ ，又当 $m = 2$ 时，另一根为 1，满足题意；当 $m = 6$ 时，另一根为 9，不满足题意



3. 已知方程 $x^2 - (3m+2)x + 2(m+6) = 0$ 的两个实根都大于 3，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $2 \leq m < \frac{15}{7}$

【解析】令 $f(x) = x^2 - (3m+2)x + 2(m+6)$ ，由题意可得
$$\begin{cases} \Delta = (3m+2)^2 - 8(m+6) \geq 0 \\ \frac{3m+2}{2} > 3 \\ f(3) = 15 - 7m > 0 \end{cases}, \text{解得}$$

$$2 \leq m < \frac{15}{7}.$$

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & x > 0, \\ x^2 + 4x + 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 若方程 $f(x) = a$ ($a \in R$) 有四个不同的实数根 x_1, x_2, x_3, x_4 (其

中 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$)，则 $x_1 + x_2 + \frac{1}{x_3} + x_4$ 的取值范围是()

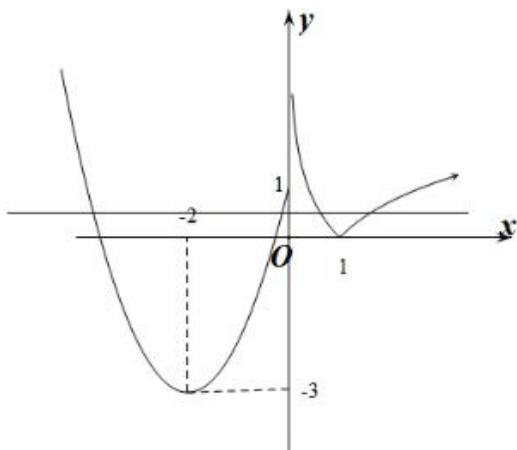
- A. $(-2, 2e-4]$ B. $(-1, 2e-2]$ C. $(2, 2e+4]$ D. 不确定

【答案】A

【解析】作出 $f(x)$ 的图象如下图所示，根据二次函数图象的对称性可知 $x_1 + x_2 = -4$ ，且

$0 < x_3 < 1, 1 < x_4 \leq e$ ，因为 $|\ln x_3| = |\ln x_4| = a, \therefore x_3 x_4 = 1, \frac{1}{x_3} + x_4 = 2x_4 = 2e^a$ ，又因为

$1 < x_4 \leq e, \therefore 2 < 2x_4 \leq 2e$ ，所以 $x_1 + x_2 + \frac{1}{x_3} + x_4$ 的取值范围是 $(-2, 2e-4]$ ，故选 A.



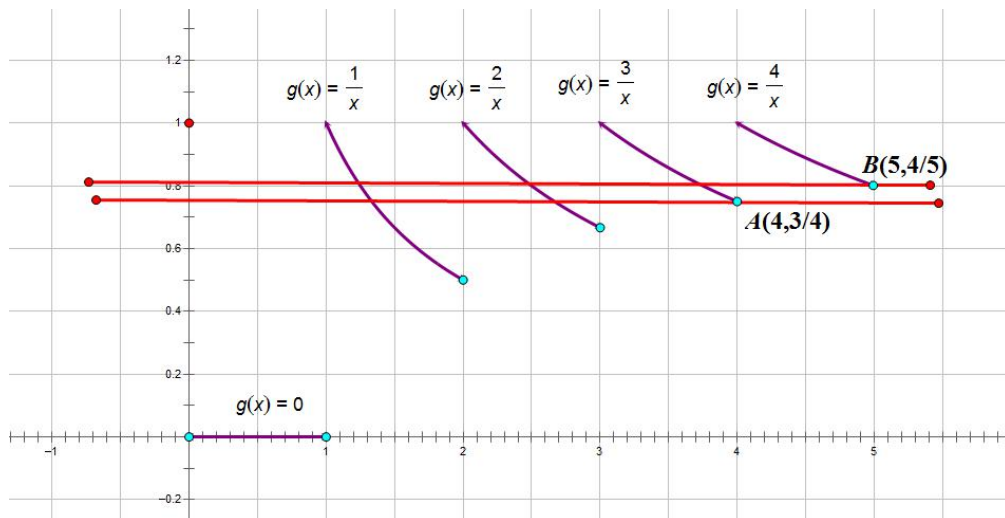
5. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[1] = 1, [0.5] = 0$ ，已知函数 $f(x) = \frac{[x]}{x} - k$ ($x > 0$)，若方程 $f(x) = 0$ 有且仅有 3 个实根，则实数 k 的取值范围是()

- A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ B. $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$ C. $\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right]$ D. $\left(\frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right]$

【答案】C

【解析】函数 $f(x) = \frac{[x]}{x}$ ($x > 0$) 的图象如下图所示，若方程 $f(x) = 0$ 有且仅有三个实根，即函数

$y = f(x) (x > 0)$ 与 $y = k$ (上图中的虚线) 有且仅有三个公共点，由图象易得， $k \in \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right]$ ，故选 C.



如果本套试题有不会的题目，请于每周五，周六，周日下午 16:00----17:00 来吉地教育五角场校区，一线教师，**免费**为你一对一答疑！