向量测试

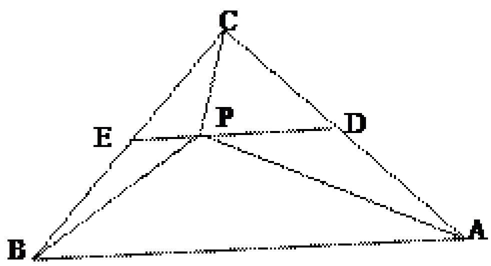
1．已知 P 是 ΔABC 内一点，且满足 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，记 $\Delta ABP,\Delta BCP$，ΔACP 的面积依次为 S_1，S_2，S_3，则 S_1：S_2：S_3 等于（　　）

A. 1:2:3　　　B. 1:4:9　　　C. 6:1:2　　　D. 3:1:2

【解析】选 D

试题分析：.

取 AC、BC 中点 D、E，连接 PA、PB、PC、PD、PE，



由 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，得 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=-2\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$，

$\therefore 2\overrightarrow{PD}=-4\overrightarrow{PE}$，　即 $\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PE}$；

同理得 $\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}=-3\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{BA}=-3\times 2\overrightarrow{PE}=-6\overrightarrow{PE}$，$\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{PD}$；

$\therefore \overrightarrow{PE}=-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{PD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$；

∴P 到 BC 的距离等于 A 到 BC 距离的 $\dfrac{1}{6}$，

设 ΔABC 的面积为 S，则 $S_2=\dfrac{1}{6}S$；

∴P 到 AC 的距离等于 B 到 AC 距离的 $\dfrac{1}{3}$，

$\therefore S_3=\dfrac{1}{3}S$，$S_1=S-S_2-S_3=\dfrac{1}{2}S$，

$\therefore S_1:S_2:S_3=\dfrac{1}{2}S:\dfrac{1}{6}S:\dfrac{1}{3}S=3:1:2$.

故选 D.

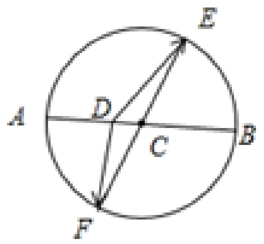
考点：平面向量的应用；两个同底的三角形的面积之比等于底上的高之比.

2．已知圆 O 的半径为 3，直径 AB 上一点 D 使 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}$，$E$、$F$ 为另一直径的两个端点，则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=$（　　）

A．-3　　　B．-4　　　C．-8　　　D．-6

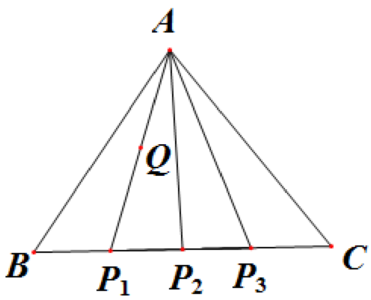
【解析】

试题分析：如图所示，因为 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE},\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$ 且 $\overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{CE}$，所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE})\cdot(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF})=\overrightarrow{DC}^2-\overrightarrow{CE}^2$，又 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD},\left|\overrightarrow{AB}\right|=6$，所以 $\left|\overrightarrow{AD}\right|=2,\left|\overrightarrow{DC}\right|=1$，所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}^2-\overrightarrow{CE}^2=1^2-3^2=-8$，故选 C.



考点：平面向量的线性运算；平面向量的数量积.

3．设 ΔABC 是边长为 1 的正三角形，点 P_1,P_2,P_3 四等分线段 BC（如图所示）.



（1）求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}$ 的值；

（2）Q 为线段 AP_1 上一点，若 $\overrightarrow{AQ}=m\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$，求实数 m 的值；

（3）P 为边 BC 上一动点，当 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 取最小值时，求 $\cos\angle PAB$ 的值.

3．（1）$\frac{13}{8}$；（2）$\frac{1}{4}$；（3）$\frac{5}{26}\sqrt{13}$.

【解析】

试题解析：（1）原式 $=\overrightarrow{AP_1}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP_2})=2\overrightarrow{AP_1}^2$，在 ΔABP_1 中，由余弦定理，得

$AP_1^2=1+\frac{1}{16}-2\times1\times\frac{1}{4}\times\cos60^0=\frac{13}{16}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}=\frac{13}{8}$

（2）易知 $\overrightarrow{BP_1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$，即 $\overrightarrow{AP_1}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$，即 $\overrightarrow{AP_1}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，因为 Q 为线段 AP_1 上一点，设 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\lambda\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$，所以 $m=\frac{1}{4}$；

（3）①当 P 在线段 BP_2 上时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}\geq 0$；

②当 P 在线段 P_2C 上时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}\leq 0$；要使 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 最小，则 P 必在线段 P_2C 上，

设 $\left|\overrightarrow{PC}\right|=x$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\left|\overrightarrow{PA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PC}\right|\cos\angle APC$

$=-\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PC}\right|\cos\angle APB=-\left|\overrightarrow{PC}\right|\left|\overrightarrow{PP_2}\right|=x^2-\frac{1}{2}x$

当 $x=\frac{1}{4}$ 时，即当 P 为 P_3 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 最小，

此时 由余弦定理可求得 $\cos\angle PAB=\frac{5}{26}\sqrt{13}$

考点：1. 平面向量的的线性运算；2. 平面向量的数量积；3. 余弦定理.

4　. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，向量 $\vec{a}=(S_n,1),\vec{b}=(2^n-1,\frac{1}{2})$，满足条件 $\vec{a}=\lambda\vec{b},\lambda\in R$ 且 $\lambda\neq 0$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设函数 $f(x)=(\frac{1}{2})^x$，数列 $\{b_n\}$ 满足条件 $b_1=2, f(b_{n+1})=\frac{1}{f(-3-b_n)},(n\in N^+)$，

①求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

②设 $c_n=\frac{b_n}{a_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 和 T_n.

试题解析：（1）因为 $a=\lambda b$，所以 $\frac{1}{2}S_n=2^n-1, S_n=2^{n+1}-2$.

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)=2^n$

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2^{1+1}-2=2$，满足上式，所以 $a_n=2^n$.

（2）①$\because f(x)=(\frac{1}{2})^x, f(b_{n+1})=\frac{1}{f(-3-b_n)}$ $f(b_{n+1})=\frac{1}{f(-3-b_n)}$

$\therefore (\frac{1}{2})^{b_{n+1}}=\frac{1}{(\frac{1}{2})^{-3-b_n}}$，$\therefore \frac{1}{2^{b_{n+1}}}=\frac{1}{2^{3+b_n}}$，$\therefore b_{n+1}=b_n+3$ $b_{n+1}-b_n=3$，

又 $\because b_1=f(-1)=2$，$\therefore \{b_n\}$ 是以 2 为首项 3 为公差的等差数列，$\therefore b_n=3n-1$

②$c_n=\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{3n-1}{2^n}$

$$T_n=\frac{2}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\frac{8}{2^3}+\cdots+\frac{3n-4}{2^{n-1}}+\frac{3n-1}{2^n}\quad ①$$

$$\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{8}{2^4}+\cdots+\frac{3n-4}{2^n}+\frac{3n-1}{2^{n+1}}\quad ②$$

①-②得$\dfrac{1}{2}T_n=1+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{3}{2^4}+\cdots+\dfrac{3}{2^n}-\dfrac{3n-1}{2^{n+1}}$

$\dfrac{1}{2}T_n=1+3\cdot\dfrac{\frac{1}{4}(1\cdot\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{3n-1}{2^{n+1}}$，$\dfrac{1}{2}T_n=1+\dfrac{3}{2}(1\cdot\dfrac{1}{2^{n-1}})-\dfrac{3n-1}{2^{n+1}}$

$T_n=2+3(1\cdot\dfrac{1}{2^{n-1}})-\dfrac{3n-1}{2^n}$，$T_n=2+3\cdot\dfrac{3}{2^{n-1}}-\dfrac{3n-1}{2^n}$

$T_n=5\cdot\dfrac{3n+5}{2^n}$

考点：1、等差数列；2、等比数列；3.错位相减法.