数列练习

1. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=-1$，$a_{n+1}=S_nS_{n+1}$，则 $S_n=$________.

解析 $\because a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=S_nS_{n+1}$

$\therefore \dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}=1 \therefore \dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=-1$

$\therefore \left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$为公差为 -1 的等差数列

首项为 $\dfrac{1}{S_1}=-1$

$\therefore \dfrac{1}{S_n}=(-1)-(n-1)=-n \therefore S_n=\dfrac{-1}{n}$

2.数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=n^2(\cos^2\dfrac{n\pi}{3}-\sin^2\dfrac{n\pi}{3})$，其前 n 项和为 S_n，则 S_{30} 为______.

解析 $:\because a_n=n^2(\ cos^2\dfrac{n\pi}{3}-sin^2\dfrac{n\pi}{3})=n^2cos\dfrac{2n\pi}{3}$

$\therefore S_{30}$=$1^2cos\dfrac{2\pi}{3}+2^2cos\dfrac{4\pi}{3}+3^2cos2\pi+\ldots+30^2cos20\pi$

$=-\dfrac{1}{2}\times1-\dfrac{1}{2}\times2^2+3^2-\dfrac{1}{2}\times4^2-\dfrac{1}{2}\times5^2+6^2+\ldots-\dfrac{1}{2}\times28^2-\dfrac{1}{2}\times29^2+30^2$

$=-\dfrac{1}{2}\left[1+2^2-2\times3^2)+(4^2+5^2-6^2\times2)+\ldots+(28^2+29^2-30^2\times2)\right]$

$=-\dfrac{1}{2}\left[(1^2-3^2)+(4^2-6^2)+\ldots+(28^2-30^2)+(2^2-3^2)+(5^2-6^2)+\ldots+(29^2-30^2)\right]$

$=-\dfrac{1}{2}\left[-2(4+10+16\ldots+58)-(5+11+17+\ldots+59)\right]$

$=-\dfrac{1}{2}\left[-2\times\dfrac{4+58}{2}\times10-\dfrac{5+59}{2}\times10\right]=470$故答案为 :470

官方网站：www.jidiedu.com
联系电话：55051096　　18721029997　　18721869997
华东总部：上海市杨浦区五角场万达广场 C 座 9 层（政通路 177 号）
　　　　　上海市徐家汇中金国际广场 C 座 7 层（漕溪北路 375 号）

3.在等差数列$\{a_n\}$中，前 n 项和 $S_n=\dfrac{n}{m}$，前 m 项和 $S_m=\dfrac{m}{n}(m\neq n)$，则 S_{n+m} 的值（　　）

A．大于 4　　B．等于 4　　C．小于 4　　D．大于 2 小于 4

解析：$\because S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=\dfrac{n}{m}$

$\therefore a_1+a_n=\dfrac{2}{m}\therefore S_m=\dfrac{m\,(a_1+a_m)}{2}=\dfrac{m}{n}$

$\therefore a_1+a_m=\dfrac{2}{n}$

两式相减，$a_m-a_n=\dfrac{2(m-n)}{mn}$

而$a_m-a_n=(m-n)d$

所以$d=\dfrac{2}{mn}$,带入任意一个式子得$a_1=\dfrac{1}{mn}$

$$S_{m+n}=\frac{[a_1+a_{m+n}](m+n)}{2}=(m+n)\left\{\frac{1}{mn}+\frac{(m+n-1)}{mn}\right\}=\frac{(m+n)^2}{mn}=2+\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$$

$\because m\neq n,\therefore 2+\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}>4$所以范围$(4,+\infty)\therefore$答案选 A

4. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$.

（1）证明$\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；（2）证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{3}{2}$.

解析：（1）

$\because a_1=1,a_{n+1}=3a_n+1.\ \mathrm{n}\in\mathrm{N}^*.$

$\therefore \mathrm{a}_{\mathrm{n}+1}+\dfrac{1}{2}=3a_n+1+\dfrac{1}{2}=3(a_n+\dfrac{1}{2}).$

$\therefore\{a_n+\dfrac{1}{2}\}$是首项为　$a_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$　,公比为 3 的等比数列

(2)由（1）知$a_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3^n}{2}$，故$a_n=\dfrac{3^n\text{-}1}{2},\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{3^n\text{-}1}$，

$\dfrac{1}{a_1}=1$，当$n>1$时，$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{3^n\text{-}1}<\dfrac{1}{3^{n\text{-}1}}$；

所以$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<1+\dfrac{1}{3^1}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n\text{-}1}}=\dfrac{1\text{-}\dfrac{1}{3^n}}{1\text{-}\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}(1\text{-}\dfrac{1}{3^n})<\dfrac{3}{2}$，

故$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$

5. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n. 已知$2S_n=3^n+3$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；（2）若数列$\{b_n\}$满足$a_nb_n=\log_3 a_n$，求$\{b_n\}$的前 n 项和T_n.

【解析】

（I）因为$2S_n=3^n+3$

所以，$2a_1=3+3$ ，故$a_1=3$，

当$n>1$ 时，$2S_{n-1}=3^{n-1}+3$，

此时，$2a_n=2S_n-2S_{n-1}=3^n-3^{n-1}$，即$a_n=3^{n-1}$，

所以，$a_n=\begin{cases}3, & n=1,\\ 3^{n-1}, & n>1,\end{cases}$

（II）因为$a_nb_n=\log_3 a_n$ ，所以$b_1=\frac{1}{3}$

当$n>1$ 时，$b_n=3^{1-n}\log_3 3^{n-1}=(n-1)\cdot 3^{1-n}$

所以$T_1=b_1=\frac{1}{3}$

当$n>1$ 时，

$T_n=b_1+b_2+b_3++b_n=\frac{1}{3}+\left(1\times 3^{-1}+2\times 3^{-2}+\cdots+(n-1)3^{1-n}\right)$

所以$3T_n=1+\left(1\times 3^{0}+2\times 3^{-1}+\cdots+(n-1)3^{2-n}\right)$

两式相减，得

$2T_n=\frac{2}{3}+\left(3^0+3^{-1}+3^{2-n}\right)-(n-1)\cdot 3^{1-n}\quad=\frac{2}{3}+\frac{1-3^{1-n}}{1-3^{-1}}-(n-1)\cdot 3^{1-n}$

$=\frac{13}{6}-\frac{6n+3}{2\times 3^n}$

所以$T_n=\frac{13}{12}+\frac{6n+3}{4\times 3^n}$

经检验，$n=1$ 时也适合，

综上可得：$T_n=\frac{13}{12}+\frac{6n+3}{4\times 3^n}$