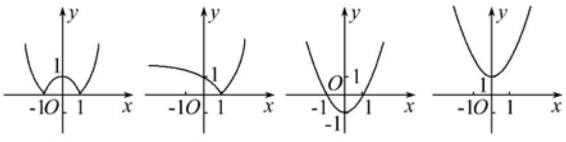
指数函数

1．已知函数 $f\left(x\right)=2^{x}-2$，则函数 $y=\left|f\left(x\right)\right|$ 的图象可能是（　　）



【答案】B

【解析】$|f(x)|=|2^x-2|=\begin{cases}2^x-2, x\geq 1,\\ 2-2^x, x<1,\end{cases}$

易知函数 y=|f(x)|的图象的分段点是 x=1,且过点(1,0),(0,1),又|f(x)|≥0,故选 B.

【误区警示】本题易误选 A 或 D,出现错误的原因是误以为 y=|f(x)|是偶函数.

2．若函数 $f(x)=a^{x}-x-a(a>0\text{且}a\neq 1)$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围为________________

【答案】$\left(1,+\infty\right)$

【解析】

试题分析： 研究函数 $y=a^{x}$ 与函数 $y=x+a$ 图像交点个数. 当 $a>1$ 时，由于直线 $y=x+a$ 在 y 轴的截距大于1，所以函数 $y=a^{x}$ 与函数 $y=x+a$ 图像在 $x<0$ 及 $x>0$ 时各有一个交点. 当 $0<a<1$ 时，由于 $y=a^{x}$ 单调减，直线 $y=x+a$ 单调增，所以函数 $y=a^{x}$ 与函数 $y=x+a$ 图像只 3 在 $x>0$ 时有一个交点.

考点：指数函数图像

3．设 $x\in R$， $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$，若不等式 $f(x)+f(2x)\leq k$ 对于任意的 x∈R 恒成立，则实数 k 的取值范围是________

【答案】k≥2

【解析】不等式化为 k≥$\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+\left(\frac{1}{2}\right)^{|2x|}$，因为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}\in(0，1]$，所以 k≥2.

4．已知点 $(2,9)$ 在函数 $f(x)=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）图象上，对于函数 $y=f(x)$ 定义域中的任意 x_1， x_2（$x_1\neq x_2$），有如下结论：

① $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$；

② $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$；

③ $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$；

④ $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

上述结论中正确结论的序号是______________.

【答案】(1)，(4)

【解析】

试题分析：点$(2,9)$在函数$f(x)=a^x$（$a>0$且$a\neq 1$）图象上，即$9=a^2,\therefore a=3, f(x)=3^x$

∵对于函数$f(x)=3^x$定义域中的任意的x_1，$x_2(x_1\neq x_2)$，

有$f(x_1+x_2)=3^{x_1+x_2}=3^{x_1}\cdot 3^{x_2}=f(x_1)\ f(x_2)$，

∴结论（1）正确；

又$f(x_1x_2)=3^{x_1x_2}$，$f(x_1)+f(x_2)=3^{x_1}+3^{x_2},\therefore f(x_1x_2)\neq f(x_1)+f(x_2)$，

∴结论（2）错误；

又$f(x)=3^x$是定义域R上的增函数，

∴对任意的x_1，x_2，不妨设$x_1<x_2$，则

$f(x_1)<f(x_2)$，$\therefore x_1-x_2<0$，$f(x_1)-f(x_2)<0,\therefore \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，

∴结论（3）错误，结论；

又

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})=3^{\frac{x_1+x_2}{2}},\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{3^{x_1}+3^{x_2}}{2}$$

$$\therefore \frac{\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}}{f(\frac{x_1+x_2}{2})}=\frac{1}{2}\left(\frac{3^{x_1}}{3^{\frac{x_1+x_2}{2}}}+\frac{3^{x_2}}{3^{\frac{x_1+x_2}{2}}}\right)3^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{1}{2}\left(3^{\frac{x_1-x_2}{2}}+3^{\frac{x_2-x_1}{2}}\right)\because x_1\neq x_2,$$

$$\therefore 3^{\frac{x_1-x_2}{2}}+3^{\frac{x_2-x_1}{2}}>2\therefore \frac{\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}}{f(\frac{x_1+x_2}{2})}>1$$

∴结论（4）正确；

综上，正确的结论是（1），（4）；

考点：指数函数的性质

5．已知函数 $f(x)=2^{|x-m|}$ 和函数 $g(x)=x|x-m|+2m-8$，其中 m 为参数，且满足 $m\le 5$.

（1）若 $m=2$，写出函数 $g(x)$ 的单调区间（无需证明）；

（2）若方程 $f(x)=2^{|m|}$ 在 $x\in[-2,+\infty)$ 上有唯一解，求实数 m 的取值范围；

（3）若对任意 $x_1\in[4,+\infty)$，存在 $x_2\in(-\infty,4]$，使得 $f(x_2)=g(x_1)$ 成立，求实数 m 的取值范围.

【答案】（1）$g(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,1)$，$(2,+\infty)$，单调减区间为 $(1,2)$；（2）$m<-1$ 或 $m=0$；（3）$(-\infty,\frac{7}{2}]\cup\{5\}$.

【解析】

试题分析：（1）当 $m=2$ 时，$g(x)=\begin{cases}x^2-2x-4(x\ge 2)\\-x^2+2x-4(x<2)\end{cases}$，由二次函数的图像与性质可写出函数 $g(x)$ 的单调区间；（2）先将 $f(x)=2^{|m|}$ 在 $x\in[-2,+\infty)$ 上有唯一解转化为 $|x-m|=|m|$ 在 $x\in[-2,+\infty)$ 上有唯一解，进而两边平方得到 $x=0$ 或 $x=2m$，要使 $x\in[-2,+\infty)$ 时，有唯一解，则只须 $2m=0$ 或 $2m<-2$ 即可，问题得以解决；（3）对任意 $x_1\in[4,+\infty)$，存在 $x_2\in(-\infty,4]$，使得 $f(x_2)=g(x_1)$ 成立的意思就是 $g(x)$ 的值域应是 $f(x)$ 的值域的子集，然后分别针对 $m\le 4$ 与 $4<m\le 5$ 两种情形进行讨论求解，最后将这两种情况求解出的 m 的取值范围取并集即可.

试题解析：（1）$m=2$ 时，$g(x)=\begin{cases}x^2-2x-4(x\ge 2)\\-x^2+2x-4(x<2)\end{cases}$　　1 分

函数 $g(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,1)$，$(2,+\infty)$，单调减区间为 $(1,2)$　　4 分

（2）由 $f(x)=2^{|m|}$ 在 $x\in[-2,+\infty)$ 上有唯一解

得 $|x-m|=|m|$ 在 $x\in[-2,+\infty)$ 上有唯一解　　5 分

即 $(x-m)^2=m^2$，解得 $x=0$ 或 $x=2m$　　6 分

由题意知 $2m=0$ 或 $2m<-2$

即 $m<-1$ 或 $m=0$

综上，m 的取值范围是 $m<-1$ 或 $m=0$　　8 分

（3）$f(x)=\begin{cases}2^{x-m}(x\ge m)\\2^{m-x}(x<m)\end{cases}$

则 $g(x)$ 的值域应是 $f(x)$ 的值域的子集　　9 分

①$m\le 4$时，$f(x)$在$(-\infty,m)$上单调递减，$[m,4]$上单调递增，故$f(x)\ge f(m)=1$　10 分

$g(x)$在$[4,+\infty)$上单调递增，故$g(x)\ge g(4)=8-2m$　11 分

所以$8-2m\ge 1$，即$m\le \frac{7}{2}$　12 分

②当$4<m\le 5$时，$f(x)$在$(-\infty,4]$上单调递减，故$f(x)\ge f(4)=2^{m-4}$

$g(x)$在$[4,m]$上单调递减，$[m,+\infty)$上单调递增，故$g(x)\ge g(m)=2m-8$

所以$2^{m-4}\le 2m-8$，解得$5\le m\le 6$. 又$4<m\le 5$，所以$m=5$　13 分

综上，m的取值范围是$(-\infty,\frac{7}{2}]\cup\{5\}$　14 分.

考点：1. 二次函数的图像与性质；2. 指数函数的图像与性质；3. 函数的单调性与最值.