

等差数列

1. 如果数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等差数列，给出下列命题：(1) 数列 $\{c \cdot a_n\}$ 是等差数列；(2) 数列 $\{a_n^2\}$ 是等差数列；(3) 数列 $\{|a_n|\}$ 是等差数列；(4) 数列 $\{a_n + b_n\}$ 是等差数列；其中真命题的序号是 _____.

解：逐一考虑各个命题：

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ， $c \cdot a_{n+1} - c \cdot a_n = c \cdot (a_{n+1} - a_n) = c \cdot d$ ，符合定义；

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ， $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = (a_{n+1} + a_n) \cdot d$ ，

仅当 $a_{n+1} + a_n$ 是常数时， $\{a_n^2\}$ 是等差数列，

结合 $a_{n+1} - a_n$ 是常数可知，仅当 $\{a_n\}$ 是常数列时， $\{a_n^2\}$ 是等差数列；

(3) 不符合定义，例如 $|a_n| = |2n - 7|$ ；

(4) 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的公差分别为 d_1, d_2 ，

则 $a_{n+1} + b_{n+1} - (a_n + b_n) = (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n) = d_1 + d_2$ ，符合定义。

因此(1),(4)是正确的。

2. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，前 n 项和为 S_n ，若 $S_n = S_m (n > m)$ ，求 S_{m+n} 。

解法一： $S_n = S_m \Leftrightarrow S_n - S_m = 0 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{m+1} = 0$ ，

$$\frac{(a_{m+1} + a_n) \cdot (n - m - 1)}{2} = 0 \Leftrightarrow a_{m+1} + a_n = 0,$$

$$S_{m+n} = \frac{(a_1 + a_{m+n}) \cdot (m + n)}{2} = \frac{(a_{m+1} + a_n) \cdot (m + n)}{2} = 0.$$

解法二：设 $S_n = An^2 + Bn$ ，若 $A = B = 0$ ，则 $S_{m+n} = 0$ ；若 $A = 0, B \neq 0$ ，则 $\{S_n\}$ 单调，不合题意。

若 $A \neq 0$ ，考虑对应函数 $f(x) = Ax^2 + Bx$ ，其图像必过原点，

由 $S_n = S_m (n > m)$ 可知，其对称轴为直线 $x = -\frac{m+n}{2}$ ，

数轴上，0 关于上述直线的对称点为 $m+n$ ，

因此必有 $f(0) = f(m+n) = 0$ ，即 $S_{m+n} = 0$ 。

3. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $a_3 = 12$ ， $S_{12} > 0$ ， $S_{13} < 0$

(I) 求公差 d 的取值范围；

(II) 指出 $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ 中哪一个值最大，并说明理由。

$$\text{解：(I) } \because a_3 = a_1 + 2d = 12, \text{ 且 } \begin{cases} S_{12} = \frac{12(a_1 + a_{12})}{2} > 0 \\ S_{13} = \frac{13(a_1 + a_{13})}{2} < 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 + a_{12} = 2a_1 + 11d = 24 + 7d > 0 \\ a_1 + a_{13} = 2a_1 + 12d = 24 + 8d < 0 \end{cases}$$

$$\therefore -\frac{24}{7} < d < -3$$

$$(II) \text{ 令 } a_n = a_3 + (n-3)d = 12 + (n-3)d = 0, \therefore d = \frac{12}{3-n}, \therefore -\frac{24}{7} < \frac{12}{3-n} < -3$$

$$\therefore \frac{13}{2} < n < 7, \therefore a_6 > 0, a_7 < 0, \therefore S_6 \text{ 最大。}$$

如果本套试题有不会的题目，请于每周五，周六，周日下午 16:00----17:00 来吉地教育五角场校区，一线教师，**免费**为你一对一答疑！