

数学归纳法

1. 对等式“ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$ ($n \in N^*$)”用数学归纳法证明时，从 k 到第 $k+1$ 时，左边需要添的项是 ()

A. $\frac{1}{2k+1}$; B. $\frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+4}$; C. $\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$; D. $-\frac{1}{2k+2}$.

答案：当 $n=k$ 时，左边为 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$

当 $n=k+1$ 时，左边为 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$

左边需要添的项为 $\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$ ，答案选 C.

(做这类题目时，一定要让学生把 $n=k$ 和 $n=k+1$ 时左边或右边的项写出来，再让学生加以对比，找两者的区别和练习，特别要注意顺序)

2. 用数学归纳法证明命题：若 n 是大于 1 的自然数，求证： $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n$ ，从 k 到 $k+1$ ，不等式左边添加的项的项数为_____.

答案：当 $n=k$ 时，左边为 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1}$.

当 $n=k+1$ 时，左边为 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1} - 1}$.

左边需要添的项为 $\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1} - 1}$ ，项数为 $2^{k+1} - 1 - 2^k + 1 = 2^k$.

3. 对于不等式 $\sqrt{n^2 + n} \leq n+1$ ($n \in N^*$)，某学生的证明过程如下：

(1) 当 $n=1$ 时， $\sqrt{1^2 + 1} \leq 1+1$ ，不等式成立；

(2) 假设 $n=k$ ($k \in N^*$) 时，不等式成立，即 $\sqrt{k^2 + k} \leq k+1$ ，

$$\begin{aligned} \text{当 } n=k+1 \text{ 时，} \sqrt{(k+1)^2 + (k+1)} &= \sqrt{k^2 + 3k + 2} < \sqrt{(k^2 + 3k + 2) + (k+2)} \\ &= \sqrt{(k+2)^2} = (k+2) \end{aligned}$$

所以，当 $n=k+1$ 时，不等式成立。

上述证法正确否？

解：当 $n=k+1$ 时，

$$\sqrt{(k+1)^2 + (k+1)} = \sqrt{k^2 + 3k + 2} < \sqrt{(k^2 + 3k + 2) + (k+2)} = \sqrt{(k+2)^2} = (k+2) + 1$$

不正确，应改为当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}\sqrt{(k+1)^2 + (k+1)} &= \sqrt{k^2 + 3k + 2} = \sqrt{k^2 + k + (2k+2)} < \sqrt{(k+1)^2 + 2(k+1)} \\ &= \sqrt{k^2 + 4k + 3} < \sqrt{k^2 + 4k + 4} = k+2 = (k+1)+1\end{aligned}$$

注：一定要用到 $n=k(k \in N^*)$ 时的结论

4. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $a_n > 0, (n \in N^*)$ ，且 $2S_n = a_n + \frac{1}{a_n}$ 。

(1) 求出 a_1, a_2, a_3 并猜测出通向公式；

(2) 用数学归纳法证明你的结论。

解：(1) 令 $n=1$ ，则 $2S_1 = a_1 + \frac{1}{a_1}$ ，解得 $a_1 = 1 (a_1 > 0)$ ；

$$\text{令 } n=2, \quad 2S_2 = a_2 + \frac{1}{a_2} \text{ 解得 } a_2 = -1 + \sqrt{2} (a_2 > 0).$$

$$\text{同理 } a_3 = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

$$\text{猜测： } a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

(2) 当 $n=1$ 时， $a_1 = 1 = \sqrt{1} - \sqrt{0}$ 显然成立。

假设当 $n=k$ 时原命题成立，即 $a_k = \sqrt{k} - \sqrt{k-1} (k \in N^*)$

当 $n=k+1$ 时，

$$\text{由题意 } 2S_{k+1} = a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}}, 2S_k = a_k + \frac{1}{a_k}$$

$$\text{两式相减得 } 2a_{k+1} = a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}} - (a_k + \frac{1}{a_k})$$

$$\text{又因为 } a_k = \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \text{ 代入得 } a_{k+1} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

综上所述，原命题成立

如果本套试题有不会的题目，请于每周五，周六，周日下午 16:00----17:00 来吉地教育五角场校区，

一线教师，**免费**为你一对一答疑！