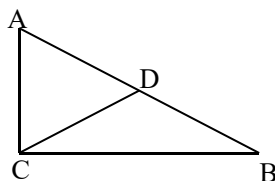


向量数量积

1. 如图：△ABC 中，∠C = 90°，D 是 AB 的中点，AC = 1, BC = √3。

求下列各式的值。

- (1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; (2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$;
(3) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CB}$; (4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ 。



解：(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$

(2) 因为 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角是 150° ，所以

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{BC}| \cos 150^\circ = 1 \times \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2};$$

$$(3) \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{3}{2}; \quad (4) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = -1。$$

2. 我们知道，当 $a, b \in R$ 时，恒有 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 成立。

对于任意的向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 是否有类似的结论成立？

$$(1) (\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2;$$

$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2。$$

解：(1) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2;$$

同样可以证明： $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ ，所以有 $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ 。

$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2 - \vec{b}^2。$$

思考：如何证？

$$(1) \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| \leq \|\vec{a} \pm \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

$$(2) \|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\| \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$(3) \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$$

3. 已知 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$ ，求下列各式的值：

$$(1) (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}); \quad (2) |3\vec{a} - 2\vec{b}|.$$

解：(1) 由 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$ 且 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ 得，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3,$$

$$\text{则 } (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = 8 + 9 - 18 = -1.$$

(2) 因为

$$|3\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (3\vec{a} - 2\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 9|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 =$$

$$9 \times 2^2 - 12 \times 3 + 4 \times 3^2 = 36, \text{ 所以 } |3\vec{a} - 2\vec{b}| = 6.$$

4. 已知向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 满足： $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ ，且 $|3\vec{a} - 2\vec{b}| = 6$ ，求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ 的大小。

解： 60°

5. 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足： $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4$ ， $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $k\vec{a} - \vec{b}$ 垂直，求实数 k 的值。

解：由 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $k\vec{a} - \vec{b}$ 垂直，则 $(k\vec{a} + \vec{b}) \cdot (k\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ，化简得： $k^2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$ ，即 $k^2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$ ，

由已知 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4$ ，所以 $4k^2 - 16 = 0$ ，解得 $k = \pm 2$ 。所以 $k = \pm 2$ 时 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $k\vec{a} - \vec{b}$ 垂直。

6. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足： $\vec{a} + 3\vec{b}$ 与 $7\vec{a} - 5\vec{b}$ 垂直， $\vec{a} - 4\vec{b}$ 与 $7\vec{a} - 2\vec{b}$ 也垂直，求向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ 的值。

解：由题知 $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (7\vec{a} - 5\vec{b}) = 0$ ，且 $(\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (7\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$ ，即：

$$\begin{cases} 7|\vec{a}|^2 + 16\vec{a} \cdot \vec{b} - 15|\vec{b}|^2 = 0 \\ 7|\vec{a}|^2 - 30\vec{a} \cdot \vec{b} + 8|\vec{b}|^2 = 0 \end{cases}, \text{ 从两式中解得： } \begin{cases} 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 \\ 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 \end{cases}, \text{ 由此知 } |\vec{a}| = |\vec{b}|, \text{ 由向量夹角公式得}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} = \frac{1}{2}, \text{ 而 } \theta \in [0, \pi], \text{ 所以 } \theta = \frac{\pi}{3}.$$

如果本套试题有不会的题目，请于每周五，周六，周日下午 16:00——17:00 来吉地教育五角场校区，一线教师，**免费**为你一对一答疑！