三角函数提高

1.已知函数 $f\left(x\right)=\cos^2\dfrac{\omega x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x-\dfrac{1}{2}(\omega>0,x\in\mathrm{R})$．若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\pi,2\pi\right)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围是(　　)

A. $\left(0,\dfrac{5}{12}\right]$　　B. $\left(0,\dfrac{5}{12}\right]\cup\left[\dfrac{5}{6},\dfrac{11}{12}\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{5}{6}\right]$　　D. $\left(0,\dfrac{5}{12}\right]\cup\left[\dfrac{5}{6},\dfrac{11}{12}\right]$

【答案】D

【解析】$f\left(x\right)=\dfrac{1+\cos\omega x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\dfrac{1}{2}\cos\omega x=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

$\because \pi<x<2\pi,\therefore \omega\pi<\omega x<2\omega\pi,\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}<\omega x+\dfrac{\pi}{6}<2\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}$，函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\pi,2\pi\right)$ 内没有零点

(1) $\left(\omega\pi+\dfrac{\pi}{6},2\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\subseteq\left(2k\pi,2k\pi+\pi\right),k\in Z$，则 $\begin{cases}\omega x+\dfrac{\pi}{6}\ge 2k\pi\\ 2\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+\pi\end{cases}$，则 $\begin{cases}\omega\ge 2k-\dfrac{1}{6}\\ \omega\le k+\dfrac{5}{12}\end{cases}$，取 $k=0$，

$\because \omega>0,\ \therefore 0<k\le\dfrac{5}{12}$；

（2）$\left(\omega\pi+\dfrac{\pi}{6},2\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\subseteq\left(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi\right),k\in Z$，则 $\begin{cases}\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}\ge 2k\pi+\pi\\ 2\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+2\pi\end{cases}$，解得：

$\begin{cases}\omega\ge 2k+\dfrac{5}{6}\\ \omega\le k+\dfrac{11}{12}\end{cases}$，取 $k=0$，$\therefore \dfrac{5}{6}\le k\le\dfrac{11}{12}$；综上可知：$k$ 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{5}{12}\right]\cup\left[\dfrac{5}{6},\dfrac{11}{12}\right]$，选 D．

2.已知函数 $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 相交，若在 y 轴右侧的交点自左向右依次记为 M_1，M_2，M_3，…，则 $\left|\overrightarrow{M_1M_{12}}\right|$ 等于(　　)

A. $\dfrac{16\pi}{3}$　　B. 6π　　C. $\dfrac{17\pi}{3}$　　D. 12π

【答案】A

【解析】试题分析：由题意可知，$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2\cos x\sin x=\sin 2x$，所以与直线 $y=\frac{1}{2}$

相交可得 $M_1\left(\frac{\pi}{12},\frac{1}{2}\right),M_2\left(\frac{5\pi}{12},\frac{1}{2}\right),M_3\left(\frac{13\pi}{12},\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots$，由此可知

$\left|\overrightarrow{M_1M_{12}}\right|=\left|\overrightarrow{M_1M_{11}}\right|+\left|\overrightarrow{M_{11}M_{12}}\right|=5\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}$.

3.设函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\left(x\in\left[0,\frac{9\pi}{8}\right]\right)$，若方程 $f\left(x\right)=a$ 恰好有三个根，分别为

$x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$，则 $x_1+2x_2+x_3$ 的值为(　　)

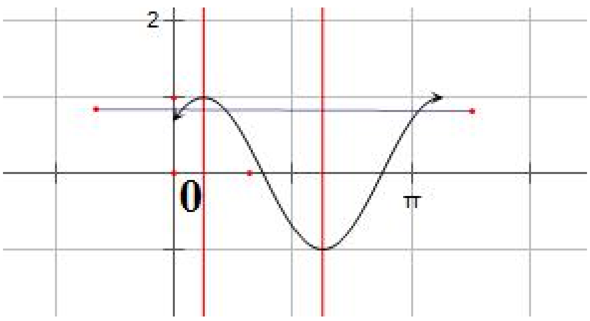
A. $\frac{3\pi}{2}$　　B. $\frac{5\pi}{4}$　　C. π　　D. $\frac{3\pi}{4}$

【答案】A

【解析】当 $x\in\left[0,\frac{9}{8}\pi\right]$，当 $x=\frac{\pi}{8}$ 时函数取得最大值，当 $x=\frac{5}{4}\pi$ 时函数取得最小值，根据图像可得 x_1,x_2

关于 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称，$x_1+x_2=2\times\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$，$x_2,x_3$ 关于 $x=\frac{5}{8}\pi$ 对称，$x_2+x_3=2\times\frac{5}{8}\pi=\frac{5}{4}\pi$，所以

$x_1+2x_2+x_3=\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$，故选 A.



4.若 $y=\left|3\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{12}\right)+2\right|$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后与自身重合，且 $y=\tan\omega x$ 的一个对称中心为

$\left(\frac{\pi}{48},0\right)$，则 ω 的最小正值为__________.

【答案】24

【解析】由题意可知 $y=\left|3\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{12}\right)+2\right|$ 的周期为 T,满足 $\frac{\pi}{6}=k\cdot\frac{\pi}{\omega},k\in N$，即 $\omega=6k$，由 $y=\tan\omega x$

的一个对称中心为$\left(\dfrac{\pi}{48},0\right)$可得$\omega=24k$．所以$\omega=24$为最小值．填 24.

5.若将函数$f\left(x\right)=\left|\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{8}\right)\right|(\omega>0)$的图像向左平移$\dfrac{\pi}{12}$个单位后，所得图像对应的函数为偶函数，则$\omega$的最小值是________.

【答案】$\dfrac{3}{2}$；

【解析】若将函数$f\left(x\right)=\left|\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{8}\right)\right|(\omega>0)$的图像向左平移$\dfrac{\pi}{12}$个单位后，所得图像对应的函数为$g\left(x\right)=\left|\sin\left[\omega\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)-\dfrac{\pi}{8}\right]\right|$为偶函数，根据正（余）弦函数的奇偶性可知：则$g\left(0\right)=\left|\sin\left(\dfrac{\omega\pi}{12}-\dfrac{\pi}{8}\right)\right|=1$，或$g\left(0\right)=\left|\sin\left(\dfrac{\omega\pi}{12}-\dfrac{\pi}{8}\right)\right|=0$，则$\sin\left(\dfrac{\omega\pi}{12}-\dfrac{\pi}{8}\right)=\pm1$，$\sin\left(\dfrac{\omega\pi}{12}-\dfrac{\pi}{8}\right)=\pm1$或$\sin\left(\dfrac{\omega\pi}{12}-\dfrac{\pi}{8}\right)=0$，则$\dfrac{\omega\pi}{12}-\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{k\pi}{2}$，即：$\omega=6k+\dfrac{3}{2}$，当$k=0$时，$k$取得最小值为$\dfrac{3}{2}$.

6.已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\phi\right)(\omega>0,0\le\phi\le\pi)$是$R$上的偶函数，其图象关于点$M\left(\dfrac{3\pi}{4},0\right)$对称，且在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上是单调函数，则$\omega=$__________.

【答案】$\dfrac{2}{3}$或 2

【解析】由题意$\left|\sin\varphi\right|=1$，又$0\le\varphi\le\pi$，$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，又$\sin\left(\omega\times\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，$\omega\times\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}=k\pi$，$3\omega=4k-2,k\in Z$，当$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{\pi}{2}\le\omega x+\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{\pi}{2}\left(\omega+1\right)$，由于函数在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调，所以$\dfrac{\pi}{2}\left(\omega+1\right)\le\dfrac{3\pi}{2}$，$\omega\le2$，$0\le3\omega\le6$，所以$4k-2=2或6$，即$\omega=\dfrac{2}{3}或2$，