解三角形与不等式

1．在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$2\sin C\cos B=2\sin A+\sin B, c=3ab$，则$ab$的最小值是(　　)

A．$\dfrac{1}{9}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{2+\sqrt{3}}{9}$　　D．$\dfrac{2-\sqrt{3}}{9}$

【答案】B

【解析】$\because 2\sin C\cos B=2\sin A+\sin B$，又$A=\pi-(B+C)$,$\therefore \cos C=-\dfrac{1}{2}$．$\because c=3ab$，

$\therefore 9a^2b^2=c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2+ab\ge 3ab$．解得$ab\ge\dfrac{1}{3}$．所以选 B.

2．在ΔABC中，已知边a,b,c所对的角分别为A,B,C，若$2\sin^2 B+3\sin^2 C=2\sin A\sin B\sin C+\sin^2 A$，则$\tan A=$ ________________.

【答案】-1

【解析】由正弦定理得$2b^2+3c^2=2bc\sin A+a^2$ ，由余弦定理得

$2b^2+3c^2=2bc\sin A+b^2+c^2-2bc\cos A$,即$\dfrac{b^2+2c^2}{2bc}=\sin A-\cos A$

因为$\dfrac{b^2+2c^2}{2bc}\ge\dfrac{2\sqrt{b^2\cdot 2c^2}}{2bc}=\sqrt{2}$,$\sin A-\cos A\le\sqrt{2}$,所以$b=\sqrt{2}c, A=\dfrac{3\pi}{4}\Rightarrow \tan A=-1.$

3．在ΔABC中，若$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C-\sqrt{2}\sin A\sin B$，则$\sin 2A\tan^2 B$的最大值是__________.

【答案】$3-2\sqrt{2}$

【解析】$a^2+b^2=c^2-\sqrt{2}ab$ ，由余弦定理得

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, C=\dfrac{3}{4}\pi, A=\dfrac{\pi}{4}-B, 2A=\dfrac{\pi}{2}-2B$ ，

$\sin 2A\tan^2 B=\cos 2B\dfrac{\sin^2 B}{\cos^2 B}=\dfrac{(2\cos^2 B-1)(1-\cos^2 B)}{\cos^2 B}=3-\left(2\cos^2 B+\dfrac{1}{\cos^2 B}\right)$

$\le 3-2\sqrt{2\cos^2 B\cdot\dfrac{1}{\cos^2 B}}=3-2\sqrt{2}$，即$\sin 2A\tan^2 B$的最大值是$3-2\sqrt{2}$，故答案为$3-2\sqrt{2}$.

4．ΔABC的三个内角A,B,C所对的边分别为$a,b,c, a\sin A\sin B+b\cos^2 A=2a$，则角$A$的最大值是

__________.

【答案】$\dfrac{\pi}{6}$

【解析】根据正弦定理，$a\sin A\sin B+b\cos^2 A=2a$ 转化为 $\sin^2 A\sin B+\sin B\cos^2 A=2\sin A$，即 $\sin B=2\sin A$，$b=2a$，根据余弦定理 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3a^2+c^2}{4ac}\geq\dfrac{2\sqrt{3}ac}{4ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $a=c$ 时，等号成立，由于 $A\in(0,\pi)$，所以由 $\cos A\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 得，$A\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$，所以角 A 的最大值为 $\dfrac{\pi}{6}$.

5．已知 ΔABC 的三个内角 A，B，C 的对边依次为 a，b，c，外接圆半径为 1，且满足 $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{2c-b}{b}$，则 ΔABC 面积的最大值为__________.

【答案】$\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$

【解析】由 $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{2c-b}{b}$ 得 $\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=\dfrac{2c-b}{b}=\dfrac{2\sin C-\sin B}{\sin B}$，则 $\sin A\cos B=2\sin C\cos A-\sin B\cos A$，所以 $\sin(A+B)=2\sin C\cos A=\sin C$，$\cos A=\dfrac{1}{2}$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{a}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=2r=2$，$a=\sqrt{3}$，由余弦定理 $3=a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc\geq 2bc-bc=bc$，当且仅当 $b=c$ 时取等号，所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A\leq\dfrac{1}{2}\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，即最大值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.